كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الاولى**

المادة : جبر خطي٢

المحاضرة : الخامسة/عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

1- اوجد القيم الذاتية والأشعة الذاتية للمصفوفة

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -2\\ -1 & 0 & -2\end{bmatrix}$$

الحل:

$$\begin{vmatrix}2-\lambda & 1 & 1\\ 2 & 1-\lambda & -2\\ -1 & 0 & -2-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)\big((1-\lambda)(-2-\lambda)\big)-1\big(2(-2-\lambda)-2\big)+1\big(0-(1-\lambda)(-1)\big)$$

$$=-\lambda^3+\lambda^2+5\lambda+3=0$$

$$\Rightarrow(\lambda+1)^2(\lambda-3)=0\Rightarrow \lambda_1=-1,\ \lambda_2=3$$

من اجل $\lambda_1=-1$

$$\begin{bmatrix}3 & 1 & 1\\ 2 & 2 & -2\\ -1 & 0 & -1\end{bmatrix}\xrightarrow{L_3\leftrightarrow L_1}\begin{bmatrix}-1 & 0 & -1\\ 2 & 2 & -2\\ 3 & 1 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow[3l_1+l_3]{2l_1+l_2}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & -4\\ 0 & 1 & -2\end{bmatrix}\xrightarrow{-2l_3+l_2}$$

$$\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2\end{bmatrix}$$

الجملة الخطية الموافقة لمنوذج المصفوفة هي

$$-x_1+x_3=0$$

$$x_2-2x_3=0$$

لدينا مجهولين رئيسيين x_1, x_2 ومجهول حر x_3

نفرض $x_3=\alpha$

$$x_1=-x_3=-\alpha \quad ; \quad x_2=2x_3=2\alpha$$

عبارة الحل العام:

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\alpha\\2\alpha\\\alpha\end{bmatrix} \longrightarrow E_{\lambda_1}=\left\{\begin{bmatrix}-\alpha\\2\alpha\\\alpha\end{bmatrix} ; \alpha\in\mathbb{R}\right\}$$

E_{λ_1} قاعدة لـ $\left\{\begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix}\right\}$

من أجل $\lambda_2=3$:

$$|A-\lambda I_3|=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\2 & -2 & -2\\-1 & 0 & -5\end{bmatrix} \xrightarrow[-l_1+l_2]{2l_1+l_3} \begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\0 & 0 & 0\\0 & -1 & -6\end{bmatrix}$$

فالجملة الخطية الموافقة لمنوذج المصفوفة:

$$-x_1+x_2+x_3=0$$

$$-x_2-6x_3=0$$

نفرض $x_3=\alpha$

$$x_2=-6x_3=-6\alpha$$

$$x_1=-x_2+x_3=-6\alpha+\alpha=-5\alpha \longrightarrow X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5\alpha\\6\alpha\\\alpha\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5\\6\\1\end{bmatrix}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$E_{\lambda 2} = \left\{ \begin{bmatrix} -5x \\ -6x \\ x \end{bmatrix} ; x \in \mathbb{R} \right\}$$

$E_{\lambda 2}$ أساس لـ $\left\{ \begin{bmatrix} -5 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

(2) هل الشعاعان التاليان متعامدان:

$$X = \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = -\sqrt{3} + 0 + \sqrt{3} = 0$$

$X \perp Y$

3- اختبر فيما إذا كان الشعاع

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

ناظمي، إذا لم يكن استنتج منه شعاع ناظمي.

$$1 + 9 + 4 + 16 = 30 \neq 1$$

X ليس ناظمي

للحصول على الشعاع الناظمي انطلاقاً من X نتبع

$$\|X\| = \sqrt{1 + 9 + 4 + 16} = \sqrt{30}$$

$$Y = \frac{X}{\|X\|} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{3}{\sqrt{30}} \\ \frac{-2}{\sqrt{30}} \\ \frac{4}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

4- صيغة نظرية كيلي هاملتون لايجاد مقلوب المصفوفة

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 3 & 1 & 1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 1 & 2\end{bmatrix}.$$

$$B=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$\varphi(\lambda)=|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}3-\lambda & 4\\ 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-5\lambda+2.$$

نعوض صيغة كيلي هاملتون

$$A^2-5A+2I=0$$

$$A-5I+2A^{-1}=0$$

$$A^{-1}=\frac{1}{2}[-A+5I]=\begin{bmatrix}\frac{5}{2} & 0\\ 0 & \frac{5}{2}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\frac{3}{2} & 2\\ \frac{3}{2} & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2-\lambda & 0\\ 0 & 1 & 1-\lambda\end{bmatrix}$$

نجد المحدد فقط

$$A-\lambda I=-\lambda^3+4\lambda^2-5\lambda+2$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$A^{-1} = \frac{1}{2}(A^2 - 4A + 5I)$

بالتعويض نجد

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة