كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الاولى**

المادة : جبر خطي٢

المحاضرة : السابعة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

٥

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

ملاحظات:

① $\langle x, \lambda y \rangle = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle$

$\langle x, \lambda y \rangle = \overline{\langle \lambda y, x \rangle}$

$= \overline{\lambda \langle y, x \rangle} = \bar{\lambda} \overline{\langle y, x \rangle} = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle$

② $\langle 0, x \rangle = \langle x, 0 \rangle = 0$

مثال: برهن أن التطبيق $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$

المعرّف وفق القاعدة

$$\langle (a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \bar{b}_i$$

وهو جداء داخلي على $\mathbb{C}^n$

الحل:

$x = (a_1, \dots, a_n)$ ، $y = (b_1, \dots, b_n)$ ، $z = (c_1, \dots, c_n)$

عناصر كيفية من $\mathbb{C}^n$ وليكن $\lambda$ عنصر كيفي من $\mathbb{C}$

1] $\langle x, y \rangle = a_1 \bar{b}_1 + \dots + a_n \bar{b}_n$

$\langle y, x \rangle = b_1 \bar{a}_1 + \dots + b_n \bar{a}_n$

$= \overline{b_1 \bar{a}_1 + \dots + b_n \bar{a}_n}$

$= a_1 \bar{b}_1 + \dots + a_n \bar{b}_n = \langle x, y \rangle$

2] $\langle x+y, z\rangle = \langle (a_1,\dots,a_n),(b_1,\dots,b_n),(c_1,\dots,c_n)\rangle$

$= \langle (a_1+b_1,\dots,a_n+b_n),(c_1,\dots,c_n)\rangle$

$= (a_1+b_1)\overline{c_1} + \dots + (a_n+b_n)\overline{c_n}$

$= a_1\overline{c_1} + \dots + a_n\overline{c_n} + b_1\overline{c_1} + \dots + b_n\overline{c_n}$

$= \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$

3] $\langle \alpha x, y\rangle = \langle \alpha(a_1,\dots,a_n),(b_1,\dots,b_n)\rangle$

$= \alpha a_1\overline{b_1} + \dots + \alpha a_n\overline{b_n}$

$= \alpha(a_1\overline{b_1} + \dots + a_n\overline{b_n}) = \alpha\langle x, y\rangle$

4] $\langle x, x\rangle = a_1\overline{a_1} + \dots + a_n\overline{a_n}$

$= |a_1|^2 + \dots + |a_n|^2 \geq 0$

يكون $\langle x, x\rangle = 0$ إذا فقط إذا كان $a_i = 0, \forall i = 1,\dots,n$

أي إذا فقط $\langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$

وبما أنه تحقق أن $\langle \cdot, \cdot\rangle$ جداء داخلي على $\mathbb{C}^n$ ويسمى بالجداء الداخلي القانوني على $\mathbb{C}^n$

مثال: ليكن $V = \mathbb{R}^n$ وليكن $x = (x_1,\dots,x_n)$ و $y = (y_1,\dots,y_n)$ عنصرين من $\mathbb{R}^n$

إن التطبيق المعرف بالشكل $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

جداء داخلي على $\mathbb{R}^2$ ويسمى بالجداء الداخلي القانوني على $\mathbb{R}^n$.

تعريف: ليكن $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ فضاء جداء داخلي إن نظيم شعاع $x$ من $V$ هو بالتعريف $\sqrt{\langle x, x\rangle}$ ونرمز له بـ $\|x\|$



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: ليكن $V=\mathbb{R}^2$ وليكن $x=(2,3)$

أ- اوجد نظيم $x$ مستخدماً الجداء الداخلي العادي على $\mathbb{R}^2$

ب- اوجد نظيم $x$ مستخدماً الجداء المعرف بالشكل

$$\langle (x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2$$

الحل:

1- $\|x\| = \sqrt{(2)^2+(3)^2} = \sqrt{13}$

2- $\|x\| = \sqrt{\langle (2,3),(2,3)\rangle} = \sqrt{4-6-6+27} = \sqrt{19}$

الزوايا في فضاء الجداء الداخلي:

ليكن $V$ فضاء جداء داخلي حقيقي. نفرض الزاوية $\theta$ بين المتجهين $x$ و $y$ غير المنعدمين بالشكل

$$\cos\theta = \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\cdot\|y\|} \quad ; \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

مثال: في الفضاء الداخلي العادي $\mathbb{R}^3$ عيّن الزاوية بين المتجهين $x=(1,0,-1)$ و $y=(1,1,0)$

$$\langle x,y\rangle = 1+0+0 = 1$$

$$\|x\| = \sqrt{2} \quad , \quad \|y\| = \sqrt{2}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{3}$$

مثال: ليكن $V = M_2(\mathbb{R})$ فضاء متجهات بالجداء الداخلي

$$\langle A,B\rangle = tr(B^t A) \; ; \; \forall A,B \in M_2(\mathbb{R})$$

أوجد الزاوية $\theta$ الكائنة بين المتجهين

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الحل:

$$\langle A,B\rangle = Tr\left(\begin{bmatrix}1 & 3\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}\right)$$

$$= Tr\left(\begin{bmatrix}2 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}\right) \Rightarrow Tr = 3$$

$$\|A\| = \sqrt{Tr\left(\begin{bmatrix}2 & 0\\ 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 3 & 1\end{bmatrix}\right)} = 3$$

$$\|B\| = \sqrt{Tr\begin{bmatrix}1 & 3\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 3 & 1\end{bmatrix}} = \sqrt{1+1+1+9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\cos\theta = \frac{3}{3\times 2\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

تعريف:

ليكن $x,y$ متجهين من فضاء جداء داخلي نقول أن $x$ يعامد $y$ ونكتب $x \perp y$ إذا كان $\langle x,y\rangle = 0$

نتائج:

1- إذا كان $y \perp x$ فإن $x \perp y$

2- $x \perp 0$ ومتكن $x$ من $V$

تعريف: ليكن $V$ فضاء جداء داخلي، ولتكن $\phi \neq S \subseteq V$

نسمي المجموعة $\{x \in V, x \perp s, \forall s \in S\}$ بالمجموعة العامدة للمجموعة $S$، ونرمز لها بـ $S^{\perp}$

مثال: في فضاء الجداء الداخلي العادي $\mathbb{RP}^3$ لتكن $S = \{(1,1,1)\}$

عين المجموعة العامدة لـ $S$ وأوجد أساسها.

الحل:

$$S^{\perp} = \{(x,y,z) \in \mathbb{RP}^3 : \langle (x,y,z),(1,1,1)\rangle = 0\}$$



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=0\}$.

نفرض $y=\alpha$ ، $z=\beta$ $\Rightarrow x=-\alpha-\beta$.

$S^{\perp} = \{(-\alpha-\beta, \alpha, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

$S^{\perp}$ أي $\{(-1,1,0),(-1,0,1)\}$

تعريف: نقول عن مجموعة $S$ من فضاء داخلي $V$ أنها متعامدة إذا كانت عناصرها متعامدة مثنى مثنى ونقول عنه المجموعة المتعامدة أنها نظامية التعامد إذا كانت نظيم كل عنصر من عناصرها يساوي 1.

مبرهنة: إذا كانت $S = \{z_1, \dots, z_n\}$ مجموعة نظامية التعامد في فضاء جزئي داخلي $W$ من $V$ بحيث $W = \langle S \rangle$ فإن $S$ مولد لـ $W$ وأي عنصر من $V$ يكتب بطريقة وحيدة على الشكل $x = w + w'$ حيث $w \in W$ و $w' \perp W$.

لبرهان: لإثبات أن $S$ مجموعة نظامية التعامد نثبت:

$$w = \langle x, z_1 \rangle z_1 + \dots + \langle x, z_n \rangle z_n$$

نضع $a = x - w$.

$a$ عنصر من $W$ لأن $x$ عنصر من $W$ و $w$ عنصر من $W$

$x = a + w$.

مثال: ليكن $W$ هو الفضاء الجزئي من $\mathbb{R}^3$ المولد بالعناصر

$z_1 = (0,1,0)$ و $z_2 = \left(\frac{4}{5}, 0, -\frac{3}{5}\right)$



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

المطلوب: عيّن عن الشعاع $x=(1,2,3)$ كمجموع عنصرين احدهما من $W$ والآخر يوامد $W$ في فضاء جداء داخلي معطى

الحل:

لدينا:

$$\langle z_1, z_2 \rangle = 0$$

$$\|z_1\| = 1 \text{ و } \|z_2\| = 1$$

وبالتالي: $\{z_1, z_2\}$ مجموعة نظامية التعامد.

$$W = \langle x, z_1 \rangle z_1 + \langle x_2, z_2 \rangle z_2$$

$$= \langle (1,2,3), (0,1,0) \rangle (0,1,0) + \langle (1,2,3), \left(\frac{4}{5}, 0, -\frac{3}{5}\right) \rangle \left(\frac{4}{5}, 0, -\frac{3}{5}\right)$$

$$= 2(0,1,0) - 1\left(\frac{4}{5}, 0, -\frac{3}{5}\right)$$

$$= \left(-\frac{4}{5}, 2, \frac{3}{5}\right)$$

$$a = x - w$$

$$= (1,2,3) - \left(-\frac{4}{5}, 2, \frac{3}{5}\right) = \left(\frac{9}{5}, 0, \frac{12}{5}\right)$$

$$\Rightarrow x = a + w, \; a \perp W \text{ و } w \in W$$

قاعدة غرام شميت في إيجاد قاعدة نظامية التعامد:

ليكن $(V, \langle , \rangle)$ فضاء جداء داخلي و لنفرض أنّ $\dim V = n$ و أنّ $\{x_1, \dots, x_n\}$ قاعدة لـ $V$ عندئذ تصبح القاعدة $\{x_1, \dots, x_n\}$ نظامية التعامد تتبع الخطوات الآتية:

$$y_1 = x_1 \Rightarrow z_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|}$$



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$y_2 = x_2 - \langle x_2, z_1 \rangle z_1 \Rightarrow z_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|}$ ... [2]

... [3]

$y_3 = x_3 - \langle x_3, z_1 \rangle z_1 - \langle x_3, z_2 \rangle z_2$

$\Rightarrow z_3 = \frac{y_3}{\|y_3\|}$

وهكذا ...

مثال: في فضاء الجداء الداخلي العادي لـ $\mathbb{R}^3$ (الاقليدي)

ولتكن: $S = \{x_1 = (1,1,1), x_2 = (1,1,0), x_3 = (1,0,0)\}$

قاعدة لـ $\mathbb{R}^3$ ، استخدم قاعدة غرام شميدت لبناء قاعدة نظامية متعامدة لـ $\mathbb{R}^3$

الحل: نفرض $y_1 = x_1$ أي $y_1 = (1,1,1)$

$\Rightarrow \|y_1\| = \sqrt{3} \Rightarrow z_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

$y_2 = x_2 - \langle x_2, z_1 \rangle z_1$ ... [2]

$= (1,1,0) - \langle (1,1,0), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \rangle \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

$= (1,1,0) - \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$= (1,1,0) - \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = (1,1,0) - \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

$= \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

$\Rightarrow \|y_2\| = \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$Z_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|} = \frac{3}{\sqrt{6}}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right).$$

$$y_3 = x_3 - \langle x_3, z_1\rangle z_1 - \langle x_3, z_2\rangle z_2$$

$$y_3 = (1,0,0) - \left\langle (1,0,0), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\rangle$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \left\langle (1,0,0), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)\right\rangle \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

$$= (1,0,0) - \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

$$= (1,0,0) + \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{2}{6}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right).$$

$$\|y_3\| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$Z_3 = \frac{y_3}{\|y_3\|} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right).$$

وبكون قاعدة نظامية للفضاء $(Z_1, Z_2, Z_3)$

انتهت المحاضرة



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z