كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الاولى**

المادة : جبر خطي٢

المحاضرة : **السادسة/نظري/**

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

٥

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

2025

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

تعريف: ليكن V فضاء شعاعي منتهي البعد فوق الحقل F ولنفرض أن S جملة أعمدة من V، وليكن T مؤثراً خطياً على V نسمي كثير الحدود $|A-\lambda I|$ حيث A مصفوفة T بالنسبة للجملة S، بكثير الحدود المميز للمؤثر الخطي T إذا كانت S جملة أعمدة أخرى لـ V، فإن $[T]_{S'} = P^{-1}[T]_S P$

وهذا يعني أن مصفوفة T بالنسبة لجملة الأعمدة تشابه مصفوفة T بالنسبة لجملة أخرى، وبما أن للمصفوفات المتشابهة نفس كثير الحدود المميز، إذاً كثير الحدود لمؤثر خطي لا يتعلق باختيار جملة الأعمدة.

نتيجة: إن كل قيمة ذاتية لمؤثر خطي هي جذر لكثير حدوده المميز والعكس.

مثال: أوجد القيم الذاتية للمؤثر الخطي T المعرف على $\mathbb{R}^2$ وفق القاعدة:

الحل: لنكتب مصفوفة T بالنسبة للقاعدة القانونية

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\varphi_\lambda = A - \lambda I = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) - 6$$

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

$2 - \lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 6 = 0$

$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$

$(\lambda - 4)(\lambda + 1) = 0$

$\lambda = 4 \ , \ \lambda = -1$

توصيف المطلوب

تقطير المصفوفات والمؤثرات الخطية:

تعريف: نقول عن مصفوفة مربعة أنها قابلة للتقطير إذا كانت مشابهة لمصفوفة قطرية، أي إذا كان بالإمكان إيجاد مصفوفة غير شاذة P بحيث أن $P^{-1}AP$ مصفوفة قطرية.

مبرهنة: لتكن A مصفوفة مربعة من المرتبة n. الشرط اللازم والكافي حتى تكون المصفوفة A مشابهة إلى مصفوفة قطرية B، هو أنه يكون بالإمكان إيجاد n شعاع ذاتي مستقل خطياً للمصفوفة A، وفي هذه الحالة تكون العناصر القطرية لـ B هي القيم الذاتية للمصفوفة A، وتكون $P = P^{-1}AP$ حيث P المصفوفة التي أعمدتها الأشعة الذاتية المقابلة لها.

مبرهنة: إذا كانت الأشعة الذاتية لمؤثر خطي والموافقة لقيم ذاتية مختلفة مثنى مثنى تكون مستقلة خطياً.

مبرهنة: تكون المصفوفة المربعة A فوق الحقل F قابلة للتقطير إذا وفقط إذا كانت:

1- كثير الحدود المميز P_A للمصفوفة A يملك عوامل خطية بـ λ فوق F، أي أنه:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$P(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\dots(\lambda-\lambda_k)^{m_k}$ ... ①

$\dim E_{\lambda_i} = m_i$ حيث $i = 1, 2, \dots, k$

مثال: قطرية إمكانية المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

الحل: لنوجد كثير الحدود المميز

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)((2-\lambda)^2)$$

إذن القيم الذاتية هي $\lambda_1 = 1$ و $\lambda_2 = 2$

من أجل $\lambda_2 = 2$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

نكتب المعادلات الموافقة لهذه المصفوفة:

$$\left.\begin{array}{l} 3x_1 = 0 \\ 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 \end{array}\right\} \longrightarrow x_1 = 0$$

$$-2x_2 + 3x_3 = 0$$

نفرض $x_3 = x$ $\longrightarrow$ $x_2 = -\frac{1}{2}x$

$$E_{\lambda_2} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}x \\ x \end{bmatrix} \text{ في } x \in \mathbb{R} \right\}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

أساس E_{λ_2} : $\left\{\begin{bmatrix}0\\-\frac{1}{2}\\1\end{bmatrix}\right\}$

$\dim E_{\lambda_2} = 1 \neq 2$

غير قابلة للتقطير.

تمرين: قطّر إن أمكنَ المصفوفة

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 3 & 1\\ -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

لنوجد كثير الحدود المميّز لـ A.

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix}1-\lambda & -1 & -1\\ 1 & 3-\lambda & 1\\ -1 & -1 & 1-\lambda\end{vmatrix} \xrightarrow{L_2+L_3} \begin{vmatrix}1-\lambda & -1 & -1\\ 1 & 3-\lambda & 1\\ 0 & 2-\lambda & 2-\lambda\end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{-L_3+L_2} \begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & -1\\ 1 & 2-\lambda & 1\\ 0 & 0 & 2-\lambda\end{vmatrix}$$

$$\varphi(\lambda) = (2-\lambda)\left((2-\lambda)(1-\lambda)\right).$$

إذاً مضاعفة $\lambda_1 = 2$ ⟵ $\lambda_2 = 1$

من أجل $\lambda_1 = 2$

$$\begin{bmatrix}-1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & -1\end{bmatrix} \xrightarrow[-L_1+L_3]{L_2+L_3} \begin{bmatrix}-1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$-x_1 - x_2 - x_3 = 0$$

بفرض $x_3 = \alpha$ ، $x_2 = \beta$ ⟵ $x_1 = -\alpha - \beta$.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$E_{\lambda_1} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha-\beta \\ \beta \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\beta \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix} ; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

$\Leftarrow$ E_{λ_1} أساس $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\dim E_{\lambda_1} = 2$

$\Rightarrow$ قابلة للتقطير.

من أجل $\lambda_2 = 1$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_1 \leftrightarrow l_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_1 + l_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

نحل المعادلات لمواقعة لسنوم الجملة:

$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$

$-x_2 - x_3 = 0$

بفرض $x_3 = \alpha \Leftarrow x_2 = -\alpha$

$x_1 - 2\alpha + \alpha \longrightarrow x_1 = \alpha$

$$E_{\lambda_2} = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} ; \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\dim E_{\lambda_2} = 1$ ، أساس E_{λ_2} هو $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

المصفوفة قابلة للتقطير

$B = P^{-1} A P$

حيث:

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تعريف: ليكن V فضاء متجهي منتهي البعد $\mathbb{F}$ على فضاء متجهي V إن V قابل للتقطير إذا أمكن إيجاد قاعدة لـ V بحيث تكون مصفوفة T بالنسبة لهذه القاعدة قطرية.

ملاحظة: يكون المؤثر الخطي على الفضاء المتجهي المنتهي البعد V قابلاً للتقطير إذا وفقط إذا وجدت قاعدة لـ V عناصرها أشعة ذاتية لـ T.

مثال: بين أن المؤثر الخطي T المعرف على $\mathbb{R}^2$ وفق القاعدة:

$$T(a,b) = (2a+2b, -a-b)$$

قابل للتقطير.

الحل: نجد مصفوفة T بالنسبة للقاعدة القانونية

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$= (2-\lambda)(-1-\lambda)+2 = -2-2\lambda+\lambda+\lambda^2+2 = 0$

$\lambda^2-\lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda-1) = 0$

$\lambda_1 = 0$ أو $\lambda_2 = 1$

من أجل $\lambda = 0$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

نُمثل المعادلات المرافقة

نفرض $2x_1+2x_2=0 \Rightarrow x_1 = -x,\ x_2 = x$

$$E_{\lambda_1} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ x \end{bmatrix};\ x \in \mathbb{R} \right\}$$

E_{λ_1} أساسه $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$\dim E_{\lambda_1} = 1$

من أجل $\lambda_2 = 1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

نُمثل المعادلات المرافقة $x_1+2x_2=0$

نفرض $x_2 = x \Rightarrow x_1 = -2x$

$$E_{\lambda_2} = \left\{ \begin{bmatrix} -2x \\ x \end{bmatrix};\ x \in \mathbb{R} \right\}$$

E_{λ_2} أساسه $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

المؤثر الخطي قابل للتقطير وفق القاعدة $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

فضاءات الجداء الداخلي:

تعريف: ليكن V فضاء شعاعي فوق الحقل F (حيث F = ℂ في الحالة العامة).

يقال عن التطبيق

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \to F$$

أنه جداء داخلي إذا حققت الشروط الآتية

(1) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ ، (2) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$

(3) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

(4) $\langle x, x \rangle \geq 0$ و $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

أيا كان x, y, z من V و λ من F.

ملاحظات:

1) إذا كان $\langle \cdot , \cdot \rangle$ جداء داخلي على V فإن الفضاء $(V, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ يسمى فضاء جداء داخلي.

2) يمكن دمج الشرطين 2، 3 بالشرط $\langle \lambda x + \beta y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$.

3) ينتج من الشرط الأول أن $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}$، البند (4) يشترط أن يكون هذا العدد موجب حقيقي.

4)

$$\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$$

لأن:

$$\langle x, y + z \rangle = \overline{\langle y + z, x \rangle}$$

$$= \overline{\langle y, x \rangle + \langle z, x \rangle} = \overline{\langle y, x \rangle} + \overline{\langle z, x \rangle}$$

$$= \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z