كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الاولى**

المادة : تحليل متجهات

المحاضرة : **الخامسة/عملي/**

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

السؤال الأول: ليكن المنحني c المعطى بالتمثيل الضمني:

$f(x_1,x_2) = (x_2-2)^2 - (x_1-3)^2 = 0$

ادرس النقط الشاذة.

الحل:

$f(x_1) = -3(x_1-3)^2$

$f(x_2) = 2(x_2-2)$

بالحل نجد أنه $\Leftarrow x_1=3, x_2=2$ $(3,2)$

$f(3,2) = 0$

$(3,2) \in c$ نقطة شاذة

$f_{x_1x_1} = -6(x_1-3)$

$f_{x_2x_2} = 2$

$f_{x_1x_2} = 0$

$\Delta = f_{x_1x_2}^2 - f_{x_1x_1} f_{x_2x_2} = 0 - 2(-6(x_1-3))$

$= 12x_1 - 36$

$\Delta|_{(3,2)} = 0$

$(3,2)$ نقطة تراجع.

نوجد الميل حسب المعادلة:

$m^2 f_{x_2x_2} + 2f_{x_1x_2} + f_{x_1x_1} = 0$

$2m^2 + 0 + (-6(x_1-3))$

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

$2m^2=0 \Rightarrow m=0$

المماس الأفقي $y=z$ أي نأخذ قيمة $x_1=3$ نجد

$(x_2-z)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^3=0$

$(x_2-z)^2=\frac{1}{8} \Rightarrow x_2-z=\mp\frac{1}{2\sqrt{2}}$

$x_2=z+\frac{1}{2\sqrt{2}}$ أو $x_2=z-\frac{1}{2\sqrt{2}}$

النقطة هنا تراكمي نوع أول

السؤال الثاني: ليكن c المنحني المعطى بالتمثيل الضمني:

~~حل النقطة الثانية~~

$f(x_1,x_2)=(x_2-2x_1)^2-4x_1^5=0$

$f_{x_1}=2(-4x_1)(x_2-2x_1^2)-2x_1^4=-8x_1x_2+16x_1^3-20x_1^4=0$

$f_{x_2}=2(x_2-2x_1^2)=0$

بالجمع المشترك نجد $x_1=0, x_2=0$

$f(0,0)=0 \Rightarrow (0,0)\in C$

النقطة $(0,0)$ هذه لصورة نوعها نوعاً المماس المنحنية من المرتبة الثانية

$f_{x_1x_1}=-8x_2+48x_1^2-80x_1^3$

$f_{x_2x_2}=2$ ، $f_{x_1x_2}=-8x_1$

$\Delta=f_{x_1x_2}^2-f_{x_1x_1}f_{x_2x_2}$

$\Delta(0,0)=0$

$\Rightarrow$ النقطة $(0,0)$ نقطة تراكمي نوعاً ما بالمماس

$m^2f_{x_2x_2}+2mf_{x_1x_2}+f_{x_1x_1}=0$

المماس الأفقي $2m^2=0 \Rightarrow m=0$

معادلة المماس في النقطة $(0,0)$ هي $y=0$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نأخذ قيمة x_2 بجوار $x_1=0$ ولتكن $x_1=\frac{1}{4}$ ولنجد x_2

$$\left(x_2-\frac{1}{8}\right)^2=\frac{1}{44}>0$$

$$\left(x_2-\frac{1}{8}\right)^2=\frac{1}{44} \Rightarrow x_2=\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{3}{16}>0$$

$$x_2=\frac{1}{8}-\frac{1}{16}=\frac{1}{16}>0$$

نقطة تراجوسة النوع الثاني $(0,0)$.

السؤال الثالث: عين نقاط التراجع للمنحنى الممثل بالشكل

$$\vec{x}(t)=(t^3+t^2)\vec{P_1}+t^4\vec{P_2}$$

$$x'(t)=(3t^2+2t)P_1+4t^3P_2$$

$$\left.\begin{matrix}3t^2+2t=0\\ 4t^3=6\end{matrix}\right\} \Rightarrow t=0$$

نقطة التراجع $(0,0)$.

$$x''(t)=(6t+2)P_1+12t^2P_2$$

$$x''(0)=2P_1$$

$$x'''(0)=6P_1+24tP_2$$

$$x'''(0)=6P_1$$

$$x''(0)\wedge x'''(0)=\begin{vmatrix}P_1 & P_2 & P_3\\ 6t+2 & 12t^2 & 0\\ 6 & 24t & 0\end{vmatrix}$$

$$x''(t)\wedge x'''(t)=0=\begin{vmatrix}P_1 & P_2 & P_3\\ 2 & 0 & 0\\ 6 & 0 & 0\end{vmatrix}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\vec{\chi}''''(t) = 24\vec{e}_2$ ، $\chi''''(0) \neq 0$

$$\chi''(t) \wedge \chi''''(t) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & 0 \end{vmatrix} = 48 e_3 \neq 0$$

تراجو نوع ثالثة.

السؤال الرابع: عيّن نوع نقاط التراجو للمنحنى c المعطى بالتمثيل

$$\vec{\chi}(t) = (t - \sin t)\vec{e}_1 + (1 - \cos t)\vec{e}_2$$

$$\chi'(t) = (1 - \cos t)\vec{e}_1 + \sin t\, \vec{e}_2$$

$$\chi'(t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1 - \cos t = 0 \\ \sin t = 0 \end{cases} \quad t = 0$$

نقطة تراجو $(0,0)$

$$\chi''(t) = \sin t\, \vec{e}_1 + \cos t\, \vec{e}_2$$

$$\chi''(0) = \vec{e}_2 \neq 0$$

$$\chi'''(t) = \cos t\, \vec{e}_1 - \sin t\, \vec{e}_2$$

$$\chi'''(0) = \vec{e}_1 \neq 0$$

$$\chi''(t) \wedge \chi'''(t) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -e_3 \neq 0$$

$k = 2$ تراجو نوع أول

السؤال الخامس: ليكن لدينا المنحنى c المعطى بالتمثيل

$$\vec{\chi}(t) = 3\cos t\, \vec{e}_1 + 3\sin t\, \vec{e}_2 + 4t\, \vec{e}_3$$

1. أثبت أن c معطى بالتمثيل الطبيعي مع التعليل.
2. أوجد الثلاثية فرينيه $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$
3. أوجد طول القوس من c المبدأ بالنقطة الموافقة $T = 2\pi$
4. أوجد معادلة المستقيم الناظم للمنحنى c في النقطة الموافقة $T_0 = \pi$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

①

$$S = \int_0^T |\vec{x}'(t)|\, dT$$

$$\vec{x}'(t) = -3\sin T\vec{P_1} + 3\cos T\vec{P_2} + 4\vec{P_3}$$

$$|\vec{x}'(t)| = \sqrt{9\sin^2 T + 9\cos^2 T + 16} = 5$$

$$S = \int_0^T 5\, dT = 5T \longrightarrow S = 5T \longrightarrow T = \frac{S}{5}$$

$$\vec{x}(s) = 3\cos\left(\frac{s}{5}\right)\vec{P_1} + 3\sin\left(\frac{s}{5}\right)\vec{P_2} + 4\frac{s}{5}\vec{P_3}$$

$$\vec{x}'(s) = \frac{d\vec{x}}{ds} \longrightarrow \frac{d\vec{x}}{ds} = \frac{d\vec{x}}{dt}\cdot\frac{dT}{ds}$$

$$= -\frac{3}{5}\sin\frac{s}{5}\vec{P_1} + \frac{3}{5}\cos\frac{s}{5}\vec{P_2} + \frac{4}{5}\vec{P_3}$$

$$\left|\frac{d\vec{x}}{ds}\right| = \sqrt{\frac{9}{25}\sin^2\frac{s}{5} + \frac{9}{25}\cos^2\frac{s}{5} + \frac{16}{25}}$$

$$\left|\frac{d\vec{x}}{ds}\right| = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = 1$$

من التمثيل تمثيل طبيعي

$$\vec{T} = \frac{\vec{x}'}{|\vec{x}|'}, \quad \vec{N} = \frac{\vec{k}}{|k|}, \quad k = \frac{\vec{T}'}{|\vec{x}'|}$$

$$\vec{T} = \frac{\vec{x}''}{|\vec{x}'|} = \frac{1}{5}\left(-3\sin T\vec{P_1} + 3\cos T\vec{P_2} + 4\vec{P_3}\right)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$= -\frac{3}{5}\sin t\,\vec{e_1} + \frac{3}{5}\cos t\,\vec{e_2} + \frac{4}{5}\vec{e_3}$$

$$\vec{N} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \quad ; \quad \vec{k} = \frac{\vec{T}'}{|\vec{\gamma}'|}$$

$$\vec{T}' = -\frac{3}{5}\cos t\,\vec{e_1} - \frac{3}{5}\sin t\,\vec{e_2}$$

$$|\vec{k}| = \sqrt{\frac{9}{625}} = \frac{3}{25} \longrightarrow \vec{N} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} = -\cos t\,\vec{e_1} - \sin t\,\vec{e_2}$$

$$\vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\frac{3}{5}\sin t & \frac{3}{5}\cos t & \frac{4}{5} \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix} = \frac{4}{5}\sin t\,\vec{e_1} + \frac{4}{5}\cos t\,\vec{e_2}$$

$$S = \int_1^2 |\gamma(t)|\,dt = \int_1^2 5\,dt = [5t]_1^2 = 5 \qquad \boxed{3}$$

$$\vec{y} = \vec{\gamma}(t_0) + \vec{N}(t_0) * \ell \qquad \boxed{4}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z