كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الاولى**

المادة : تحليل متجهات

المحاضرة : السابعة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z



يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

الحقل السلمي والحقل المتجهي:

المشتقات الجزئية لحقل سلمي:

بفرض لدينا حقل سلمي $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

حيث $f = f(x,y,z)$ يوظف المشتق الجزئي بالنسبة لـ $x$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y,z) - f(x,y,z)}{h}$$

وهكذا بالنسبة لـ $\frac{\partial f}{\partial y}$ ، $\frac{\partial f}{\partial z}$

أما المشتقة الكلية بالنسبة لـ $x$ يكتب فقط بدلالة علاقة تفاضل $f$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x}$$

مثال: أوجد المشتقات الجزئية حتى المرتبة الثانية

$$f = e^{x^2 y} + x y^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy e^{x^2 y} + y^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 e^{x^2 y} + 3xy^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y e^{x^2 y} + 4x^2 y^2 e^{x^2 y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^4 e^{x^2 y} + 6xy$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x e^{x^2 y} + 2x^3 y e^{x^2 y} + 3y^2$$

$\vec{V}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ليكن الحقل المتجهي: اذا تعلق حقل متجهي

مشتق $\vec{u}$ بالنسبة لـ $x$ بالعلاقة $\vec{u} = \vec{u}(x, y, z)$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{\vec{u}(x+h, y, z) - \vec{u}(x, y, z)}{h}$$

وكذلك $\frac{\partial \vec{u}}{\partial y}$ و $\frac{\partial \vec{u}}{\partial z}$

خواصه:

1] $\frac{\partial}{\partial x} \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \cdot \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \cdot \vec{u}$

2] $\frac{\partial}{\partial x} (\vec{u} \wedge \vec{v}) = \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \frac{\partial \vec{v}}{\partial x}$

3] $\frac{\partial}{\partial x} (f \cdot \vec{v}) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \vec{v} + f \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial x}$



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال:

$$\vec{V} = x^2 \sin y\,\vec{i} + 3z\cos y\,\vec{j} + xyz\,\vec{k}$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} = 2x\sin y\,\vec{i} + yz\,\vec{k}$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x\,y} = 2x\cos y\,\vec{i} + z\,\vec{k}$$

المؤثر التفاضلي نابلا:

الرمز $\nabla$ معرّف بالعلاقة:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

يؤثر على حقول سلمية وحقول متجهية.

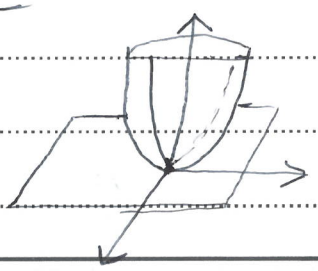
تدرج دالة سلمية:

بفرض لدينا دالة سلمية $f(x,y,z)$ نعرف تدرج الدالة السلمية بالعلاقة:

$$\text{Grad } f = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

ملاحظة: المنحى السريع لتدرج دالة سلمية هو منحى الناظم النحيم تمثل هذه الدالة في نقطة.

مثال: من أجل السطح $z = x^2 + y^2$





TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

أوجد معادلة المستوي المماس في النقطة $M(0,0,0)$ على الكرة ذات المعادلة التي تغطينا السطح هيه:

$x^2+y^2-z=0$

$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_M = 2x\Big|_M = 0$ ، $\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_M = 2y\Big|_M = 0$

$\frac{\partial f}{\partial z}\Big|_M = -1\Big|_M = -1 \Longrightarrow N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

بالتالي معادلة المستوي $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$-z=0 \Longrightarrow z=0$

وهي معادلة المستوي $xoy$.

تباعد تفرقة حالة متجهية: نفرض لدينا $\vec{V}=\vec{V}(x,y,z)$ حالة متجهية نفرض تباعد $\vec{V}$ بالعلاقة

$div(\vec{V}) = \vec{\nabla}\cdot\vec{V} = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z}$

مثال: أوجد تباعد الحقل:

$\vec{V} = 2x^2z\vec{i} - xy^2z\vec{j} + 3yz^2\vec{k}$

$div\vec{V} = 4xz - 2xyz + 6yz$

خواص:

1] $\vec{\nabla}\cdot(\vec{V}+\vec{U}) = \vec{\nabla}\cdot\vec{V} + \vec{\nabla}\cdot\vec{U}$

2] $\vec{\nabla}\cdot(f\cdot\vec{V}) = \vec{\nabla}f\cdot\vec{V} + f\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = grad f\cdot\vec{V} + f\,div\vec{V}$



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

دوران حقل متجهي:

ليكن $\vec{V}=\vec{V}(x,y,z)$ حقل متجهي نعرّف دوران الحقل بالعلاقة

$$\text{rot}\,\vec{V}=\vec{\nabla}\wedge\vec{V}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix}.$$

مثال:

$$\vec{V}=e^{x}\sin y\,\vec{i}-3Ze^{x}\cos y\,\vec{j}-xyZ^{2}\vec{k}.$$

أوجد دوران $\vec{V}$

$$\text{rot}\,\vec{V}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^{x}\sin y & -3Ze^{x}\cos y & -xyZ^{2} \end{vmatrix}$$

$$=(-xZ^{2}+3e^{x}\cos y)\vec{i}-(-yZ^{2})\vec{j}+(-3Ze^{x}\cos y-e^{x}\cos y)\vec{k}$$

خواص:

1] $\vec{\nabla}\wedge(f.\vec{V})=f(\vec{\nabla}\wedge\vec{V})+\vec{\nabla}f\wedge\vec{V}$

2] $\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\wedge\vec{V})=\text{div}(\text{rot}\,\vec{V})=0$

3] $\vec{\nabla}\wedge\vec{\nabla}f=0$

$\text{rot}(\text{grad}\,f)=0$

انتهت المحاضرة



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة