حلّ الوظيفة الخامسة

السؤال الأول: أنجز التكامل

$$I = \int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx$$

الحلّ: نكتب التكامل I بالشكل:

$$I = \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x^{\frac{1}{3}}}dx$$

نفرض $x = t^6$ فيكون $dx = 6t^5dt$، نبدل في التكامل I نجد:

$$I = \int \frac{t^3 \times 6t^5dt}{1+t^2} = 6\int \frac{t^8}{1+t^2}dt = 6\int \left(t^6 - t^4 + t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2}\right)dt$$

$$= 6\left(\frac{\left(\sqrt[6]{x}\right)^7}{7} - \frac{\left(\sqrt[6]{x}\right)^5}{5} + \frac{\left(\sqrt[6]{x}\right)^3}{3} - \sqrt[6]{x} + arctan\left(\sqrt[6]{x}\right)\right) + c$$

$$= \frac{6}{7}\left(\sqrt[6]{x}\right)^7 - \frac{6}{5}\left(\sqrt[6]{x}\right)^5 + 2\left(\sqrt[6]{x}\right)^3 - 6\sqrt[6]{x} + 6arctan\left(\sqrt[6]{x}\right) + c$$

السؤال الثاني: أنجز التكامل

$$I = \int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$$

الحلّ:

$$I = \int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \int x^{\frac{-2}{3}}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}dx$$

لدينا $m = -\frac{2}{3}$ و $n = \frac{1}{3}$ و $k = \frac{1}{2}$ ليس بعدد صحيح ولكنه عدد عادي

لدينا $\frac{m+1}{n} = 1$ عدد صحيح، لذلك نجري التحويل

$$1 + x^{\frac{1}{3}} = t^2$$

عندئذ

$$\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx = 2tdt$$

نعوض في التكامل المعطى نجد:

$$I = \int 6t^2\,dt = 2t^3 + c = 2\left(\sqrt{1+x^{\frac{1}{3}}}\right)^3 + c$$

السؤال الثالث: أنجز التكامل

$$I = \int \frac{x^3dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

الحلّ:

$$I = \int x^3\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}dx$$

لدينا $m = 3$ و $n = 2$ و $k = -\frac{1}{2}$ ليس بعدد صحيح.

لدينا $\frac{m+1}{n}=2$ عدد صحيح، لذلك نجري التحويل

$$1+x^2=t^2$$

عندئذ

$$xdx=tdt$$
$$dx=t(t^2-1)^{-\frac{1}{2}}dt$$

نعوض في التكامل المعطى نجد:

$$I=\int (t^2-1)^{\frac{3}{2}}(t)^{-1}\,t(t^2-1)^{-\frac{1}{2}}dt=\int (t^2-1)\,dt=\frac{t^3}{3}-t+c$$
$$=\frac{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3}{3}-\sqrt{1+x^2}+c$$

السؤال الرابع: أنجز التكامل

$$I=\int x^{-4}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx$$

الحلّ: لدينا $m=-4$ و $n=2$ و $k=-\frac{1}{2}$ ليس بعدد صحيح ولكنه عدد عادي.

لدينا $\frac{m+1}{n}=-\frac{3}{2}$ عدد غير صحيح.

لدينا $\frac{m+1}{n}+k=-2$ عدد صحيح، لذلك نجري التحويل

$$1-x^2=x^2t^2$$

عندئذ $x=(t^2+1)^{-\frac{1}{2}}$ بالتالي

$$dx=-\frac{t}{(t^2+1)^{\frac{3}{2}}}dt$$

نعوض في التكامل المعطى نجد:

$$I=\int -(t^2+1)\,dt=-\frac{t^3}{3}-t+c=-\frac{1}{3}\left(\sqrt{\frac{1-x^2}{x^2}}\right)^3-\sqrt{\frac{1-x^2}{x^2}}+c$$

السؤال الخامس: أنجز التكامل

$$I=\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+3x-4}}$$

الحلّ: باستخدام تعويض أولر الثالث:

ثلاثي الحدود x^2+3x-4 يملك جذران حقيقيان مختلفان $\alpha=1,\beta=-4$

نفرض

$$\sqrt{x^2+3x-4}=t(x-\alpha)=t(x-1)$$

نربع الطرفين نجد $(x+4)(x-1)=t^2(x-1)^2$ عندئذ

$$(x+4)=t^2(x-1)$$

بالتالي

$$x=\frac{4+t^2}{t^2-1}$$

عندئذ $dx=\frac{-10t}{(t^2-1)^2}dt$ نعوض نجد:

$$I=\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+3x-4}}=-2\int \frac{dt}{t^2+4}=-arctan\left(\frac{t}{2}\right)+c=-arctan\left(\frac{\sqrt{x^2+3x-4}}{2(x-1)}\right)+c$$

السؤال السادس: أنجز التكامل

$$I = \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+x-x^2}}$$

الحلّ: باستخدام تعويض أولر الثاني: $c = 1 > 0$، نضع

$$\sqrt{1+x-x^2} = tx - \sqrt{c} = tx - 1$$

نربع الطرفين نجد: $1 + x - x^2 = t^2x^2 - 2tx + 1$ بالتالي

$$x = \frac{2t+1}{t^2+1}$$

بالتالي

$$dx = \frac{-2t^2 - 2t + 2}{(t^2+1)^2}dt$$

نعوض نجد

$$I = \int \frac{-2}{t^2+2t+2}dt = -2\int \frac{dt}{(t+1)^2+1} = -2arctan(t+1) + c$$

$$= -2arctan\left(\frac{\sqrt{1+x-x^2}+1}{x} + 1\right) + c$$

$$= -2arctan\left(\frac{\sqrt{1+x-x^2}+x+1}{x}\right) + c$$
