حلّ الوظيفة الرابعة

السؤال الأول: أنجز التكامل التالي

$$I=\int\frac{x^8+3}{x^2-1}dx$$

الحلّ: نلاحظ بأنّ درجة كثيرة الحدود في البسط أكبر تماماً من درجة كثيرة الحدود في المقام لذلك نجري القسمة الإقليدية:

$$x^8+3=(x^6+x^4+x^2+1)(x^2-1)+4$$

بالتالي:

$$\frac{x^8+3}{x^2-1}=x^6+x^4+x^2+1+\frac{4}{x^2-1}$$

$$I=\int\left(x^6+x^4+x^2+1+\frac{4}{x^2-1}\right)dx=\int(x^6+x^4+x^2+1)dx+\int\frac{4}{x^2-1}dx$$

$$=\int(x^6+x^4+x^2+1)dx-4\int\frac{dx}{1-x^2}$$

$$=\frac{x^7}{7}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}+x-4\times\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+c$$

$$=\frac{x^7}{7}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}+x-2\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+c$$

السؤال الثاني: أنجز التكامل التالي

$$I=\int\frac{x}{(x-1)(x^2+2)}dx$$

الحلّ: لإيجاد التكامل $I=\int\frac{x}{(x-1)(x^2+2)}dx$، نبحث عن الثوابت A,B,C بحيث

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+2}\;....(*)$$

إيجاد A: نضرب طرفي العلاقة $(*)$ بـ $(x-1)$ ثم نضع $x=1$ في العلاقة الناتجة نجد $A=\frac{1}{3}$

إيجاد B: نضرب طرفي العلاقة $(*)$ بـ x ونجعل $x\longrightarrow\infty$ نجد: $A+B=0$ بالتالي $B=-\frac{1}{3}$

إيجاد C: نعوض $x=0$ في $(*)$ نجد $-A+\frac{1}{2}C=0$ بالتالي $C=\frac{2}{3}$

نلاحظ مما سبق بأنّ $A=\frac{1}{3}$ و $B=-\frac{1}{3}$ و $C=\frac{2}{3}$

$$I=\int\frac{x}{(x-1)(x^2+2)}dx=\int\left(\frac{\frac{1}{3}}{x-1}+\frac{-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2+2}\right)dx$$

$$=\int\left(\frac{\frac{1}{3}}{x-1}-\frac{1}{6}\times\frac{2x}{(x^2+2)}+\frac{\frac{2}{3}}{(x^2+2)}\right)dx$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln(x^2+2)+\frac{2}{3\sqrt{2}}arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+c$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln(x^2+2)+\frac{\sqrt{2}}{3}arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+c$$

السؤال الثالث: أنجز التكامل التالي:

$$I=\int\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$$

الحلّ: لإيجاد التكامل $I=\int\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}dx$ نبحث عن الثوابت A,B,C,D

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{x^2+4}\dots.(*)$$

- نضرب طرفي العلاقة $(*)$ بـ x ونجعل $x\longrightarrow\infty$ نجد: $A+C=0$
- نعوض $x=0$ في $(*)$ نجد $\mathrm{B}+\frac{1}{4}D=\frac{1}{4}\dots(1)$
- نعوض $x=1$ في $(*)$ نجد $5A+5B+2C+2D=1$ بالتالي $C+\mathrm{B}=\frac{1}{3}\dots(2)$
- نعوض $x=-1$ في $(*)$ نجد $-5A+5B-2C+2D=1$ بالتالي

$$C-\mathrm{B}=-\frac{1}{3}\dots(3)$$

بجمع (2) و (3) نجد $2C=0$ بالتالي $C=0$ عندئذٍ $A=0$ و $B=\frac{1}{3}$ و $D=-\frac{1}{3}$

$$I=\int\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}=\int\left(\frac{\frac{1}{3}}{x^2+1}-\frac{\frac{1}{3}}{x^2+4}\right)dx=\frac{1}{3}arctan(x)-\frac{1}{6}arctan\left(\frac{x}{2}\right)+c$$

السؤال الرابع: أنجز التكامل التالي:

$$I=\int\frac{3x+5}{x^5+2x^3+x}dx$$

الحلّ: $x^5+2x^3+x=x(x^4+2x^2+1)=x(x^2+1)^2$

نبحث عن الثوابت A,B,C,D,E

$$\frac{3x+5}{x(x^2+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{(x^2+1)^2}+\frac{Dx+E}{x^2+1}\dots.(*)$$

إيجاد A: نضرب طرفي العلاقة $(*)$ بـ x ثم نضع $x=0$ في العلاقة الناتجة نجد $A=5$

إيجاد D: نضرب طرفي العلاقة $(*)$ بـ x ونجعل $x\longrightarrow\infty$ نجد: $A+D=0$ بالتالي $D=-5$

أصبحت العلاقة $(*)$ بالشكل التالي

$$\frac{3x+5}{x(x^2+1)^2}=\frac{5}{x}+\frac{Bx+C}{(x^2+1)^2}+\frac{-5x+E}{x^2+1}$$

نضرب الطرفين بـ $x(x^2+1)^2$ نجد

$$3x+5=5(x^2+1)^2+(Bx+C)x+(-5x+E)x(x^2+1)$$

بالإصلاح نجد:

$$3x+5=Ex^3+(B+5)x^2+(C+E)x+5$$

بالمطابقة نجد:

$$E=0,B=-5,C=3$$

$$I=\int\left(\frac{5}{x}+\frac{-5x+3}{(x^2+1)^2}-\frac{5x}{x^2+1}\right)dx=\int\left(\frac{5}{x}-\frac{5}{2}\times(2x)(x^2+1)^{-2}+\frac{3}{(x^2+1)^2}-\frac{5}{2}\times\frac{2x}{(x^2+1)}\right)dx$$
$$=5ln|x|+\frac{5}{2(x^2+1)}+\frac{3}{2\times1\times1}\left[\frac{x}{(x^2+1)}+arctan(x)\right]-\frac{5}{2}ln(x^2+1)+c$$
$$=5ln|x|+\frac{5}{2(x^2+1)}+\frac{3x}{2(x^2+1)}+\frac{3}{2}arctan(x)-\frac{5}{2}ln(x^2+1)+c$$
