حلّ الوظيفة الثالثة

السؤال الأول: أنجز التكامل التالي

$$I = \int e^{\sqrt{x}}\,dx$$

الحل:

نضع $t = \sqrt{x}$ بالتالي $t^2 = x$ بالتالي $2tdt = dx$

$$I = \int e^{\sqrt{x}}\,dx = \int 2te^t\,dt$$

نكامل بالتجزئة

$$u = 2t\,, \qquad du = 2dt$$
$$dv = e^t dt\,, \qquad v = e^t$$

$$I = \int 2te^t\,dt = 2te^t - \int 2e^t\,dt = 2te^t - 2e^t + c = 2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + c$$

السؤال الثاني: أنجز التكاملين التاليين:

$$\int \frac{dx}{(x^2+9)^2}, \qquad \int \frac{dx}{3x^2-x+1}$$

الحلّ:

التكامل الأول

$$\int \frac{dx}{(x^2+9)^2}$$

لنضع

$$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+9)^2}$$

نلاحظ بأنّ $a^2 = 9$ نجد

$$I_2 = I_{1+1} = \frac{1}{2\times 9\times 1}\left[\frac{x}{(x^2+9)^1} + (2\times 1 - 1)I_1\right]$$
$$I_2 = \frac{1}{18}\left[\frac{x}{x^2+9} + I_1\right]$$

لنوجد I_1:

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2+9} = \frac{1}{3}\,arctan\left(\frac{x}{3}\right) + c_1$$

نعوض بشكل تراجعي نجد

$$I_2 = \frac{x}{18(x^2+9)} + \frac{1}{54}\,arctan\left(\frac{x}{3}\right) + c$$

التكامل الثاني

$$\int \frac{dx}{3x^2-x+1}$$

نلاحظ بأنّ $a = 3, b = -1, c = 1$

$$\Delta = -11 < 0$$

$$3x^2 - x + 1 = 3\left(x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\right) = 3\left(x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{36} - \frac{1}{36} + \frac{1}{3}\right) = 3\left(\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{11}{36}\right)$$

$$I = \int \frac{dx}{3x^2 - x + 1} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{11}{36}}$$

نفرض $x - \frac{1}{6} = u$ بالتالي $dx = du$

$$I = \int \frac{dx}{3x^2 - x + 1} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u^2 + \frac{11}{36}} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{11}} arctan\left(\frac{u}{\sqrt{\frac{11}{36}}}\right) + c$$

$$= \frac{2}{\sqrt{11}} arctan\left(\frac{6u}{\sqrt{11}}\right) + c = \frac{2}{\sqrt{11}} arctan\left(\frac{6x - 1}{\sqrt{11}}\right) + c$$

السؤال الثالث: أنجز التكامل التالي:

$$I = \int \frac{x}{x^2 + 3x + 2} dx$$

الحل: نكتب I بالشكل:

$$\int \frac{x}{x^2 + 3x + 2} dx = \int \frac{A(2x + 3)}{x^2 + 3x + 2} dx + \int \frac{B}{x^2 + 3x + 2} dx$$

نشتق الطرفين ثم نضرب بـ $x^2 + 3x + 2$ نجد

$$x = A(2x + 3) + B$$

بالمطابقه نجد $A = \frac{1}{2}$ و$B = -\frac{3}{2}$ بالتالي

$$I = \frac{1}{2} ln|x^2 + 3x + 2| - \frac{3}{2} I_1$$

حيث

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2 + 3x + 2}$$

لنوجد I_1

لنحلل الكسر التالي

$$\frac{1}{x^2 + 3x + 2} = \frac{1}{(x + 2)(x + 1)}$$

إلى مجموع كسريين بالشكل:

$$\frac{1}{(x + 2)(x + 1)} = \frac{A}{(x + 2)} + \frac{B}{(x + 1)} \quad \ldots\ldots (*)$$

- إيجاد A: نضرب $(*)$ بـ $(x + 2)$ ثم نعوض في العلاقة الناتجه $x = -2$ بالتالي نجد
  $A = -1$
- إيجاد B: نضرب $(*)$ بـ $(x + 1)$ ثم نعوض في العلاقة الناتجه $x = -1$ بالتالي نجد
  $B = 1$

$$\boldsymbol{I_1} = -ln|x + 2| + ln|x + 1| + c_1 = ln\left|\frac{x + 1}{x + 2}\right| + c_1$$

بالتالي

$$I=\frac{1}{2}ln|x^2+3x+2|-\frac{3}{2}ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right|+c$$

السؤال الرابع: أنجز التكامل التالي:

$$J=\int\frac{x+3}{x^2+4x-1}dx$$

الحل:

نكتب $\boldsymbol{I}$ بالشكل:

$$\int\frac{x+3}{x^2+4x-1}dx=\int\frac{A(2x+4)}{x^2+4x-1}dx+\int\frac{B}{x^2+4x-1}dx$$

نشتق الطرفين ثم نضرب بـ x^2+4x-1 نجد $x+3=A(2x+4)+B$

بالمطابقه نجد $A=\frac{1}{2}$ و $B=1$ بالتالي

$$I=\frac{1}{2}ln|x^2+4x-1|+I_1$$

حيث

$$I_1=\int\frac{dx}{x^2+4x-1}$$

لنوجد I_1

$$I_1=\int\frac{dx}{x^2+4x-1}=\int\frac{dx}{\left(x+2+\sqrt{5}\right)\left(x+2-\sqrt{5}\right)}$$

لنحلل الكسر التالي

$$\frac{1}{\left(x+2+\sqrt{5}\right)\left(x+2-\sqrt{5}\right)}$$

إلى مجموع كسريين بالشكل:

$$\frac{1}{\left(x+2+\sqrt{5}\right)\left(x+2-\sqrt{5}\right)}=\frac{A}{\left(x+2+\sqrt{5}\right)}+\frac{B}{\left(x+2-\sqrt{5}\right)}\quad \dots\dots(*)$$

- إيجاد A: نضرب $(*)$ بـ $\left(x+2+\sqrt{5}\right)$ ثم نعوض في العلاقة الناتجه $x=-2-\sqrt{5}$ بالتالي نجد
$$A=-\frac{1}{2\sqrt{5}}$$
- إيجاد B: نضرب $(*)$ بـ $\left(x+2-\sqrt{5}\right)$ ثم نعوض في العلاقة الناتجه $x=-2+\sqrt{5}$ بالتالي نجد
$$B=\frac{1}{2\sqrt{5}}$$

$$\boldsymbol{I_1}=-\frac{1}{2\sqrt{5}}ln\left|x+2+\sqrt{5}\right|+\frac{1}{2\sqrt{5}}ln\left|x+2-\sqrt{5}\right|+c_1=\frac{1}{2\sqrt{5}}ln\left|\frac{x+2-\sqrt{5}}{x+2+\sqrt{5}}\right|+c_1$$

$$I=\frac{1}{2}ln|x^2+4x-1|+\frac{1}{2\sqrt{5}}ln\left|\frac{x+2-\sqrt{5}}{x+2+\sqrt{5}}\right|+c$$