# حلّ الوظيفة الثانية

**السؤال الأول:** استخدم طريقة تغيير المتحول في إيجاد التكاملات التالية

$$I_1=\int sin\left(\frac{1}{2}x+3\right)dx,\qquad I_2=\int\frac{dx}{1-4x^2},\qquad I_3=\int\frac{dx}{(xlnx)ln(lnx)}$$
$$I_4=\int\sqrt[3]{x}\,sin\left(\sqrt[3]{x^4}\right)dx$$

**الحل:**

- $I_1=\int sin\left(\frac{1}{2}x+3\right)dx$

نضع $t=\frac{1}{2}x+3$ بالتالي $dt=\frac{1}{2}dx$

$$I_1=\int sin\left(\frac{1}{2}x+3\right)dx=\int 2sint\,dt=-2cost+c=-2cos\left(\frac{1}{2}x+3\right)+c$$

- $I_2=\int\frac{dx}{1-4x^2}$

**نكتب** $I_2$ بالشكل

$$I_2=\int\frac{dx}{1-(2x)^2}$$

نفرض $u=2x$ بالتالي $du=2dx$ عندئذ

$$I_2=\int\frac{dx}{1-(2x)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{du}{1-u^2}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|+c$$
$$=\frac{1}{4}ln\left|\frac{1+2x}{1-2x}\right|+c$$

- $I_3=\int\frac{dx}{(xlnx)ln(lnx)}$

نفرض $t=ln(lnx)$ بالتالي $dt=\frac{1}{xlnx}dx$ عندئذ

$$I_3=\int\frac{dt}{t}=ln|t|+c=ln|ln(lnx)|+c$$

- $I_4=\int\sqrt[3]{x}\,sin\left(\sqrt[3]{x^4}\right)dx$

نفرض $t=\sqrt[3]{x^4}=x^{\frac{4}{3}}$ بالتالي $dt=\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}dx$ عندئذ

$$I_4=\int\frac{3}{4}sint\,dt=-\frac{3}{4}cost+c=-\frac{3}{4}cos\left(\sqrt[3]{x^4}\right)+c$$

**السؤال الثاني:** أنجز التكاملات التالية

$$I_1=\int(x+1)arctanx\,dx,\qquad I_2=\int(x^2+2x+3)e^x\,dx,$$
$$I_3=\int e^{-x}sin2xdx\ ,I_4=\int arctan(x)dx$$

**الحلّ:**

❖ $\boldsymbol{I_1=\int(x+1)arctanx\,dx}$

نكامل بالتجزئة:

$$u=arctan(x),\quad du=\frac{dx}{x^2+1}$$
$$dv=(x+1)dx,\quad v=\frac{x^2}{2}+x$$

بالتالي:

$$I_1=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)arctan(x)-\frac{1}{2}\int\frac{(x^2+2x)}{x^2+1}dx$$
$$=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)arctan(x)-\frac{1}{2}\int\left(\frac{x^2+1-1}{x^2+1}+\frac{2x}{x^2+1}\right)dx$$
$$=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)arctan(x)-\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{x^2+1}+\frac{2x}{x^2+1}\right)dx$$
$$=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)arctan(x)-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}arctanx-\frac{1}{2}ln(x^2+1)+c$$

❖ $\boldsymbol{I_2=\int(x^2+2x+3)e^x\,dx}$

نضع

$$u=x^2+2x+3,\ \ du=(2x+2)dx$$
$$dv=e^x dx,\ \ v=e^x$$

بالتالي:

$$I_2=(x^2+x+3)e^x-\int(2x+2)\,e^x dx$$

لنضع $J=\int(2x+2)\,e^x dx$ بالتالي نكامل بالتجزئة

نضع

$$u=2x+2,\ \ du=2dx$$
$$dv=e^x dx,\ \ v=e^x$$

بالتالي:

$$J=(2x+2)e^x-\int 2\,e^x dx=(2x+2)e^x-2e^x+c_1$$
$$I_2=(x^2+x+3)e^x-(2x+2)e^x+2e^x+c$$

❖ $\boldsymbol{I_3=\int e^{-x}sin2xdx}$

الحل: نفرض

$$u=e^{-x},\ \ du=-e^{-x}dx$$
$$dv=sin2xdx,\ \ v=-\frac{1}{2}cos2x$$
$$I_3=-\frac{1}{2}e^{-x}cos2x-\frac{1}{2}\underbrace{\int e^{-x}\cos 2x\,dx}_{J}$$

النكامل $J$ ينجذ بالتجزئة: نفرض

$$u=e^{-x},\ \ du=-e^{-x}dx$$
$$dv=\cos 2x\,dx,\ \ v=\frac{1}{2}sin2x$$
$$J=\frac{1}{2}e^{-x}sin2x+\frac{1}{2}\int e^{-x}sin2x\,dx=\frac{1}{2}e^{-x}sin2x+\frac{1}{2}I_3$$

نعوض في عبارة $I_3$ :

$$I_3=-\frac{1}{2}e^{-x}cos2x-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^{-x}sin2x+\frac{1}{2}I_3\right)$$

$$I_3=-\frac{1}{2}e^{-x}cos2x-\frac{1}{4}e^{-x}sin2x-\frac{1}{4}I_3$$

بالتالي:

$$\frac{5}{4}I_3 = e^{-x}\left(-\frac{1}{2}cos2x - \frac{1}{4}sin2x\right)$$
$$I_3 = -\frac{4}{5}e^{-x}\left(\frac{1}{2}cos2x + \frac{1}{4}sin2x\right) + c$$

❖ $\boldsymbol{I_4 = \int arctan(x)dx}$

نضع

$$u = arctan(x),\ \ du = \frac{dx}{x^2+1}$$
$$dv = dx,\ \ v = x$$

بالتالي:

$$I_4 = xarctan(x) - \int \frac{xdx}{x^2+1}$$
$$I = xarctan(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c$$

**السؤال الثالث:** أنجز التكاملات التالية

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{36-3x^2}},\qquad I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}},\qquad I_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$$
$$I_4 = \int \frac{dx}{2+9x^2},\qquad I_5 = \int \frac{dx}{4-9x^2}$$

**الحلّ:**

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{36-3x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{6^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 x^2}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}}arcsin\left(\frac{\sqrt{3}x}{6}\right) + c\ \ or\ -\frac{1}{\sqrt{3}}arccos\left(\frac{\sqrt{3}x}{6}\right) + c$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}} = ln\left(x + \sqrt{x^2+4}\right) + c$$

$$I_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}} = ln\left|x + \sqrt{x^2-4}\right| + c$$

$$I_4 = \int \frac{dx}{2+9x^2} = \int \frac{dx}{\left(\sqrt{2}\right)^2 + (3)^2x^2} = \frac{1}{3\sqrt{2}}arctan\left(\frac{3x}{\sqrt{2}}\right) + c$$

$$I_5 = \int \frac{dx}{4-9x^2} = \int \frac{dx}{(2)^2 - (3)^2x^2} = \frac{1}{2\times 2\times 3}ln\left|\frac{2+3x}{2-3x}\right| + c = \frac{1}{12}ln\left|\frac{2+3x}{2-3x}\right| + c$$

-----------------------------------------