تكامل الدوال القطعية:

لدراسة التكامل $\int f(shx, chx)dx$ هناك طريقة عامة وهي بالشكل

① نجري تغيراً بالمتحول $T = Thx$

② نعوض chx, shx بدلالة T

③ نعوض dx بدلالة T, dT

$$shx = \frac{2sh\frac{x}{2}ch\frac{x}{2}}{ch^2\frac{x}{2} - sh^2\frac{x}{2}} = \frac{2}{\frac{ch\frac{x}{2}}{sh\frac{x}{2}} - \frac{sh\frac{x}{2}}{ch\frac{x}{2}}} = \frac{2}{\frac{1}{th\frac{x}{2}} - th\frac{x}{2}}$$

$$shx = \frac{2T}{1-T^2}$$

$$chx = ch^2\left(\frac{x}{2}\right) + sh^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{ch^2\frac{x}{2} + sh^2\frac{x}{2}}{ch^2\frac{x}{2} - sh^2\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{1 + (th\frac{x}{2})^2}{1 - (th\frac{x}{2})^2} \quad , \quad chx = \frac{1+T^2}{1-T^2}$$

$$T = th\frac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{2} = arc\,tan(thT)$$

$$x = 2\,arg\,thT$$

$$dx = \frac{2dT}{1-T^2}$$

مثال:

$$I=\int \frac{dx}{shx+chx+1}$$

الحل: نفرض $T=th\frac{x}{2}$

$$shx=\frac{2T}{1-T^2},\quad chx=\frac{1+T^2}{1-T^2},\quad dx=\frac{2dT}{1-T^2}$$

نعوض فنجد:

$$I=\int \frac{dT}{1+T}$$

مثال:

$$\int \frac{dx}{chx}$$

نفرض $T=th\frac{x}{2}$

$$chx=\frac{1+T^2}{1-T^2};\quad dx=\frac{2dT}{1-T^2}$$

نعوض فنجد:

$$I=\int \frac{2}{1+T^2}dT=\arctan(T)+C$$
$$=2\arctan\left(th\frac{x}{2}\right)+C$$

الملاحظة: التحويلة $T=th\frac{x}{2}$ يمكن إعادة التكاملات من النمط

$$I=\int f(shx,chx)dx$$

إلا أنك لا يستخدم دائماً لأنه يعود غالباً إلى تكاملات لدوال معقدة

نلاحظ أنه $T=th\frac{x}{2}$ يستخدم من أجل حالة التكاملات من النمط

$$\int \frac{dx}{ashx+bchx+c}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ملاحظة: توجد الكثير من الحالات نستخدم لأجلها تحويلات أكثر ملائمة لحالة التكامل:

$I=\int f(shx,chx)dx$

1) $f(-shx,chx)=-f(shx,chx)$

نفرض $T=chx$

2) إذا كان $f(shx,-chx)=-f(shx,chx)$

نفرض $T=shx$

3) إذا كان $f(-shx,-chx)=f(shx,chx)$

نفرض $T=Thx$

مثال:

$$I=\int \frac{shx}{1+chx+ch^2x}dx$$

نفرض $T=chx$ ⟵ $dT=shx\,dx$

$$I=\int \frac{dT}{1+T+T^2}=\int \frac{dT}{(T+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2T+1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

مثال:

$$I=\int \frac{ch^3x+chx}{1+shx}dx$$

نفرض $T=shx$ ⟵ $dT=chx\,dx$

$$I=\int \frac{(ch^2x+1)chx}{1+chx}dx=\int \frac{(2+sh^2x)chx}{1+chx}dx$$

$$=\int \frac{T^2+2}{T+1}dT=\int \frac{T^2-1+3}{T+1}=\int\left(T-1+\frac{3}{T+1}\right)dT$$

$$=\frac{T^2}{2}-T+3\ln|T+1|+C$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$= \frac{sh^2x}{2} - shx + 3\ln|shx+1| + C$

مثال:

$I = \int ch^3x\,dx$

نفرض $T = shx$ ⟵ $dT = chx\,dx$

$I = \int ch^2x\,chx\,dx = \int (sh^2x+1)\,chx\,dx$

$= \int (T^2+1)\,dT = \frac{T^3}{3} + T + C$

مثال:

$I = \int \frac{dx}{sh^2x - 4shx\,chx + 3ch^2x}$

الحل: نفرض $T = thx$ ⟵ $dT = \frac{1}{ch^2x}\,dx$

$dT = (1 - th^2x)\,dx \longrightarrow dx = \frac{1}{1-T^2}\,dT$

$1 - th^2x = \frac{1}{ch^2x} \longrightarrow ch^2x = \frac{1}{1-t^2}$

$sh^2x = ch^2x - 1 \longrightarrow sh^2x = \frac{T^2}{1-t^2}$

نعوض فنجد:

$I = \int \frac{dT}{T^2-4T+9} = \int \frac{dT}{(T-2)^2+5} = \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan\left(\frac{T-2}{\sqrt{5}}\right) + C$

$= \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan\left(\frac{thx-2}{\sqrt{5}}\right) + C$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

دراسة التكاملات من النمط:

$\int ch\alpha x \cdot ch\beta x \, dx$

$\int sh\alpha x \cdot sh\beta x \, dx$

$\int sh\alpha x \, ch\beta x \, dx$

سيتم معالجة هذا النوع من التكاملات بتجزئة الدالة المكاملة لمجموع بالتبسيط وفق احدى العلاقات التالية:

$$ch\alpha x \, ch\beta x = \frac{1}{2}\left[ch(\alpha+\beta)x + ch(\alpha-\beta)x\right]$$

$$sh\alpha x \, sh\beta x = \frac{1}{2}\left[ch(\alpha+\beta)x - ch(\alpha-\beta)x\right]$$

$$sh\alpha x \, ch\beta x = \frac{1}{2}\left[sh(\alpha+\beta)x + sh(\alpha-\beta)x\right]$$

مثال:

$$I = \int sh x \, ch 3x \, dx$$

$$= \int \frac{1}{2}\left(sh(4x) + sh(-2x)\right) dx$$

$$= \frac{1}{8} ch(4x) - \frac{1}{4} ch(-2x) + C$$

$$= \frac{1}{8} ch(4x) - \frac{1}{4} ch(2x) + C$$

مثال:

$$\int ch x \, ch 3x \, dx = \frac{1}{8} sh 4x + \frac{1}{4} sh 2x + C$$

* دراسة التكاملات من النمط

$$I = \int sh^m x \, ch^n x \, dx$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

① إذا كانت n أو m فردياً أو كلاهما فردياً عندئذٍ نخرج منه القوة الفردية مضروباً "واحداً" ونعبّر عنها بقية في الدالة المكاملة باستخدام العلاقة الحرة: $ch^2x - sh^2x = 1$

~~② إذا كانت كلا من القوة الفردية مضروباً "واحداً" ونعبّر عنها بقية في الدالة المكاملة باستخدام~~

② إذا كانت كلا من m و n زوجية عندئذٍ نستخدم العلاقات القطعية الآتية:

$$sh^2x = \frac{ch2x-1}{2} \quad , \quad ch^2x = \frac{ch2x+1}{2}$$

$$\frac{1}{2}sh2x = shx.chx$$

مثال:

$$\int ch^4x\,sh^3x = \int ch^4x.sh^2x\,shx\,dx$$
$$= \int ch^4x\,(1+ch^2x)\,shx$$
$$= \int (sh x.ch^4x + shx.ch^6x)\,dx$$
$$= \frac{sh^5x}{5} + \frac{ch^7x}{7} + C$$

$$I = \int 2sh^2x\,ch^2x\,dx$$
$$= 2\int (shx.chx)^2 dx$$
$$= 2\int (\frac{1}{2}sh2x)^2 dx$$
$$= 2\int \frac{1}{4}sh^2 2x\,dx = \int \frac{1}{2}\left(\frac{ch4x-1}{2}\right)dx$$
$$= \int (\frac{1}{4}ch x - \frac{1}{4})\,dx = \frac{1}{16}sh4x - \frac{1}{4}x + C$$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة