كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الاولى**

المادة : تحليل رياضي٢

المحاضرة : السادسة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

1- دراسة التكاملات من النمط:

$$I = \int R\left(x, x^{\frac{p_1}{q_1}}, x^{\frac{p_2}{q_2}}, \dots, x^{\frac{p_n}{q_n}}\right)$$

فكرة حل هذا التكامل هو استخدام تحويل (تعويض) يؤدي إلى تكامل دالة كسرية.

لنفرض أن المقام المشترك $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots, \frac{p_n}{q_n}$ هو k عندئذٍ لإيجاد هذا التكامل نفرض $x = t^k$

$$dx = k \cdot t^{k-1} dt$$

نبدل في التكامل I قيمة كل من x و dx بدلالة t فنتحول إلى تكامل دالة كسرية.

مثال:

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$$

الحل:

المقام المشترك لـ $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3}$ هو $k = 6$

نفرض $x = t^6 \Rightarrow dx = 6t^5 dt$

$$I = \int \frac{6t^5}{t^3 + t^2} = 6\int \frac{t^3}{t+1}$$

نقسم و بالطويلة:

$$\begin{array}{r|l} t^3 & t+1 \\ \hline t^3+t^2 & t^2-t+1 \\ \hline -t^2 & \\ -t^2-t & \\ \hline t & \\ t+1 & \\ \hline -1 & \end{array}$$

$$I = 6\int\left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)dt = 2t^3-3t^2+6t-\ln|t+1|+C$$

$$= 2(\sqrt[6]{x})^3-3(\sqrt[6]{x})^2+6(\sqrt[6]{x})-\ln|\sqrt[6]{x}+1|+C$$

مثال:

$$I=\int\frac{1+3x\sqrt{x}}{4\sqrt{x}}dx$$

$$I=\int\frac{1+3x\cdot(x)^{\frac{1}{2}}}{(x)^{\frac{1}{4}}}dx =$$

المقام المشترك $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{2}$ هو 4 $\Rightarrow x=4$

نفرض $x=t^4$

$$dx=4t^3dt$$

$$I=\int\frac{1+3t^4t^2}{t}\times 4t^3dt=\int(4t^2+12t^8)dt$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$= 4\frac{t^3}{3} + \frac{12t^9}{9} + c$$

$$= \frac{4}{3}(\sqrt[4]{x})^3 + \frac{12}{9}(\sqrt[4]{x})^9 + c$$

2- طريقة التكامل من النوع:

$$I = \int R\left(x, (ax+b)^{\frac{p_1}{q_1}}, (ax+b)^{\frac{p_2}{q_2}}, \ldots, (ax+b)^{\frac{p_n}{q_n}}\right) dx$$

نفرض $ax+b = t^\alpha$ حيث α المقام المشترك لـ $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \ldots, \frac{p_n}{q_n}$

$$\Rightarrow a\,dx = \alpha\, t^{\alpha-1} dt$$

مثال:

$$I = \int \frac{\sqrt{2x-3}}{3\sqrt[3]{2x-3} + 3} dx$$

نكتب I بالشكل:

$$I = \int \frac{(2x-3)^{\frac{1}{2}}}{3(2x-3)^{\frac{1}{3}} + 3} dx$$

نفرض $2x-3 = t^6$

$$2dx = 6t^5 dt \Rightarrow dx = 3t^5 dt$$

$$I = \int \frac{t^3}{3t^2+3} \times 3t^5 = \int \frac{t^8}{t^2+1}$$

$$t^2+1 \;\big|\; t^8$$

$$t^8 + t^6$$

$$-t^6$$

$$-t^6 - t^4$$

$$t^4$$

$$t^4 + t^2$$

$$-t^2$$

$$-t^2 - 1$$

$$1$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$= \int \left(t^6 - t^4 + t^2 - 1 + \frac{1}{t^2+1} \right) dt$$

$$= \frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} - t + \arctan(t) + 1$$

$$= \frac{(\sqrt[6]{2x-3})^7}{7} + \frac{(\sqrt[6]{2x-3})^5}{5} + \frac{(\sqrt[6]{2x-3})^3}{3} - \sqrt[6]{2x-3} + \arctan(\sqrt[6]{2x-3}) + C$$

3 - حالة التكامل من النمط:

$$I = \int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{q_2}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_n}{q_n}}\right) dx$$

حيث $ad - bc \neq 0$

للتخلص من هذا التكامل نفرض

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^{\alpha}$$

حيث α المقام المشترك $\frac{p_1}{q_1}, \dots, \frac{p_n}{q_n}$

مثال:

$$I = \int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\, dx$$

الحل: نفرض $\frac{x-1}{x+1} = t^2$

$$\Rightarrow x - 1 = t^2(x+1)$$

$$x - 1 = t^2 x + t^2$$

$$x - t^2 x = t^2 + 1 \Rightarrow x(1 - t^2) = t^2 + 1 \Rightarrow$$

$$x = \frac{t^2+1}{1-t^2}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$dx = \int \frac{4t^2}{(1-t^2)^2}\,dt \Rightarrow I = \int \frac{4t^2}{(1-t^2)^2}\,dt$$

$$= \int \frac{4t^2}{(1-t)^2(1+t)^2}$$

$$\frac{4t^2}{(1-t)^2(1+t^2)} = \frac{A}{(1-t)^2} + \frac{B}{1-t} + \frac{C}{(1+t)^2} + \frac{D}{1+t}$$

بحوله مباشرة بإجراء بعض العمليات الحسابية كما تعلمنا سابقاً نجد

$\boxed{A=1}$ ، $\boxed{B=-1}$ ، $\boxed{C=1}$ ، $\boxed{D=-1}$.

$$\int \frac{4t^2}{(1-t)^2(1+t)^2} = \int \frac{1}{(1-t)^2} + \int \frac{-1}{1-t} + \int \frac{1}{(1+t)^2} + \int \frac{-1}{1+t}$$

$$\frac{1}{1-t} + \ln|1-t| - \frac{1}{t+1} - \ln|1+t| + C$$

$$= \frac{1}{1-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} + \ln\left|1-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right| - \frac{1}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+1} - \ln\left|1+\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right| + C.$$

4- دراسة التكامل حسب النمط:

$I = \int x^m (a+bx^n)^k\,dx$ (ثنائي الحد التفاضلي .

لدراسة التكامل حسب النمط $I = \int x^m (a+bx^n)^k\,dx$ سنفرض الحالات الآتية $a,b \in \mathbb{R}$ و $m,n,k \in \mathbb{Q}$

① : إذا كان "k" عدد صحيح موجب تماماً عندئذٍ لإيجاد التكامل I ، نشر $(a+bx^n)^k$ حسب دستور الكرفي نوشته .

$$(a+bx^n)^k = \binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1} + (bx^n)' + \dots + \binom{k}{k-1}a^1 (bx^n)^{k-1} + \binom{k}{k}(bx^n)^k .$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

2- إذا كانت k عدد صحيح الحد تماماً عندئذٍ نجري التحويل $x=t^{s}$ حيث s المقام المشترك للكسرين m و n

3- إذا كانت k ليست بعدد صحيح أي k عدد حقيقي وتحقق $\frac{m+1}{n}$ عدد صحيح عندئذٍ نجري التحويل $a+bx^{n}=t^{s}$ حيث s مقام الكسر k

4- إذا كانت k ليست بعدد صحيح أي k عدد ما بحيث $\frac{m+1}{n}$ ليس بعدد صحيح وتحقق $\frac{m+1}{n}+k$ عدد صحيح عندئذٍ نجري التحويل $a+bx^{n}=t^{s}x^{n}$ حيث s مقام الكسر.

مثال:

$$I=\int \sqrt[3]{x}\,(2+\sqrt{x})^{4}\,dx$$

الحل:

$$I=\int (x)^{\frac{1}{3}}\,(2+x^{\frac{1}{2}})^{4}$$

$k=4 \quad , \quad m=\frac{1}{3}, \quad n=\frac{1}{2}$

$$(2+\sqrt{x})^{4}=\binom{4}{0}2^{4}+\binom{4}{1}2^{3}x(\sqrt{x})^{1}+\binom{4}{2}2^{2}+(\sqrt{x})^{2}$$
$$+\binom{4}{3}x\,2x\,(\sqrt{3})^{3}+\binom{4}{4}(\sqrt{x})^{4}$$
$$=2^{4}+4\times2^{3}+6\times2^{2}+(\sqrt{x})^{2}+4\times2x(\sqrt{x})^{3}+\binom{4}{4}(\sqrt{x})^{4}$$

ملاحظة:

$$\binom{k}{n}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$=16+32\sqrt{x}+24x+8x^{\frac{3}{2}}+x^{2}$$

$$I=\int x^{\frac{1}{3}}\left(16+32\sqrt{x}+24x+8x^{\frac{3}{2}}+x^{2}\right)dx$$

$$=12x^{\frac{4}{3}}+\frac{192}{11}x^{\frac{11}{6}}+\frac{72}{7}x^{\frac{7}{3}}+\frac{48}{17}x^{\frac{17}{6}}+\frac{3}{10}x^{\frac{10}{3}}+C$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال 2:

$$I = \int \sqrt{x}(1+2x^3)^{-2}\,dx$$

$m = \frac{1}{2}$ ، $n = 3$ ، $k = -2$.

نفرض $1+2x^3 = t^{\beta}$

حيث β المقام المشترك لـ m, n ونلاحظ أن $\beta = 2$

$x = t^2 \Rightarrow dx = 2t\,dt$.

$$I = \int t(1+2t^6)^{-2} \times 2t\,dt$$

$$= \int \frac{2t^2}{(1+2t^6)^2}\,dt = \int \frac{2t^2}{((1+(\sqrt{2}t^3)^2)^2}\,dt.$$

$m = \sqrt{2}t^3$.

$dm = 3\sqrt{2}t^2\,dt$.

$$I = \frac{\sqrt{2}}{3} \times \frac{1}{2\times 1}\left[\frac{m}{(m^2+1)} + \int \frac{dm}{m^2+1}\right]$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{2}} \times \frac{m}{m^2+1} + \frac{1}{3\sqrt{2}} \arctan(m)$$

نستبدل كل m بـ $\sqrt{2}t^3$ ثم كل t بـ $\sqrt{x}$.

$$= \frac{1}{3\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}t^3}{2t^6+1} + \frac{1}{3\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}t^3)$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}(\sqrt{x})^3}{2(\sqrt{x})^6+1} + \frac{1}{3\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}(\sqrt{x})^3).$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال:

$$I = \int x (1+x^{\frac{2}{3}})^{-\frac{1}{2}} dx$$

$m=1 \; , \; n=\frac{2}{3} \; , \; k=-\frac{1}{2}$

نلاحظ أن k ليست عدد صحيح.

$$\frac{m+1}{n} = 3$$

نفرض $1+x^{\frac{2}{3}} = t^2$ حيث x حوّ مقام الأس k

$$1+x^{\frac{2}{3}} = t^2 \quad \Rightarrow \quad x = (t^2-1)^{\frac{3}{2}}$$

$$dx = \frac{3}{2}(t^2-1)^{\frac{1}{2}} \times 2t \, dt$$

$$dx = 3t(t^2-1)^{\frac{1}{2}} dt$$

نعوض في I نجد:

$$I = \int (t^2-1)^{\frac{3}{2}} (1+(t^2-1))^{-\frac{1}{2}} \times (3t(t^2-1)^{\frac{1}{2}} dt)$$

$$= 3\int (t^2-1)^2 dt = 3\int (t^4-2t^2+1) dt$$

$$= \frac{3}{5}t^5 - 2t^3 + 3t + C$$

$$= \frac{3}{5}(\sqrt{1+x^{\frac{2}{3}}})^5 - 2(\sqrt{1+x^{\frac{2}{3}}})^3 + 3(\sqrt{1+x^{\frac{2}{3}}}) + C$$

مثال:

$$I = \int x^5 (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} dx$$

$m=5 \; , \; n=2 \; , \; k=-\frac{1}{2}$

k ليست عدد صحيح.

$$\frac{m+1}{n} = 3.$$

$$1+x^2 = t^2$$

$$x\,dx = t\,dt$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\int x^4 (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} x. = \int (t^2-1)(t)^{-1} \times t\, dt$$

$$= \int (t^4 - 2t^2 + 1)\, dt = \frac{t^5}{5} - \frac{2}{3}t^3 + c$$

$$= \frac{\sqrt[5]{(1+x)^2}}{5} - \frac{2}{3}\left(\sqrt[3]{(1+x)^2}\right) + c$$

مثال:

$$I = \int x^{-11} (1+x^4)^{-\frac{1}{2}}\, dx.$$

الحل:

$m = -11,\ n = +4,\ k = -\frac{1}{2}$

k ليس عدد صحيح،

$\frac{m+1}{n} + k = -3$ (عدد صحيح)

لذلك نجري التعويض

نفرض $1+x^4 = t^k \cdot x^4$

سوف $k = 2$ (مقام الكسر k)

$1 + x^4 = t^2 \cdot x^4$

$\Rightarrow x^4 \cdot t^2 - x^4 = 1.$

$= x^4 (t^2 - 1) = 1 \Rightarrow x^4 = \frac{1}{t^2-1}$

$\Rightarrow x = \frac{1}{(t^2-1)^{\frac{1}{4}}} = (t^2-1)^{-\frac{1}{4}}$

$\Rightarrow dx = -\frac{1}{4}(t^2-1)^{-\frac{5}{4}} \times 2t\, dt$

$dx = \frac{-t}{2(t^2-1)^{\frac{5}{4}}}\, dt$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نعوض في I نجد:

$$I=\int (t^2-1)^{\frac{11}{4}}\cdot (t^{-1})(t^2-1)^{\frac{1}{2}}\times \frac{(-t)}{2(t^2-1)^{\frac{5}{4}}}\,dt$$

$$I=\int -(t^2-1)^2\,dt$$

$$=-\frac{1}{2}\int (t^2-1)^2=-\frac{1}{2}\int (t^4-2t^2+1)\,dt$$

$$=-\frac{t^5}{10}+\frac{t^3}{3}-\frac{1}{2}t+C$$

$$=-\frac{1}{10}\times\left(\sqrt{\frac{1+x^4}{x^4}}\right)^5+\frac{1}{3}\left(\sqrt{\frac{1+x^4}{x^4}}\right)^3$$

$$-\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1+x^4}{x^4}}\right)+C$$

مثال:

$$I=\int x^{-2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}\,dx$$

$m=-2,\ n=2,\ k=-\frac{3}{2}$

$\frac{m+1}{2}=-\frac{1}{2}\longrightarrow \frac{m+1}{2}+k=-2$ (سالب صحيح) (ليس عدد صحيح)

نفرض

$$1+x^2=t^2x^2$$

$$x^2=\frac{1}{t^2-1}\longrightarrow x=(t^2-1)^{-\frac{1}{2}}\longrightarrow dx=-\frac{1}{2}(t^2-1)^{-\frac{3}{2}}\times 2t\,dt$$

$$dx=\frac{-t}{(t^2-1)^{\frac{3}{2}}}\,dt$$

$$I=\int (t^2-1)\times t^{-3}\times (t^2-1)^{\frac{3}{2}}\times\frac{-t}{(t^2-1)^{\frac{3}{2}}}\,dt$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$= -\int \frac{t^2-1}{t^2}\,dt = \int \frac{1-t^2}{t^2}\,dt$$

$$= \int \left(\frac{1}{t^2}-1\right)dt = -\frac{1}{t} - t + c$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}}} = -\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}} + C$$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة