



كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الاولى

المادة : تحليل رياضي ٢

المحاضرة : الخامسة / نظري

{{ مكتبة A to Z }}

مكتبة A to Z : Facebook Group

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960



الدكتور :

المحاضرة:

النامية نظرية



القسم: الرياضيات

السنة: الأولى

المادة: تحليل رياضي

التاريخ: / /

A to Z Library for university services

$$I = \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

دراسة التكامل منه النم:

- * لتكن $P(x) = P_n(x)$ بالدرجة n و $Q(x) = Q_m(x)$ بالدرجة m كثيرتي حدود عندئذ إذا كانت درجة كثير الحدود في البسط أكثر أو تساوي كثيرة الحدود في المقام فإننا نقسم البسط على المقام أعني نجري القسمة الإلزامية لنجد:
 $P(x) = H(x) \times Q(x) + S(x)$
 - $H(x)$ مثله ناتج القسمة وهو كثير حدود
 - $S(x)$ (باقي القسمة) وهو كثير حدود درجة أقل من درجة $Q(x)$ (القسمة عليه).

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = H(x) + \frac{S(x)}{Q(x)}$$

بالتالي:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int H(x) dx + \int \frac{S(x)}{Q(x)} dx$$

عندئذ $\int H(x) dx$ نخرج بسهولة أو يطلب تحويله تفريق (تحليل) $\frac{S(x)}{Q(x)}$ إلى مجموع كسور جزئية بسيطة.

مثال: انجز التكامل التالي:

$$I = \int \frac{x^5}{x^2+1} dx$$

نلاحظ بأنه درجته كثيرة الحدود في البسط أكثر تماماً من درجته كثيرة الحدود في المقام لذلك نلجأ لشرع القسمة لأقليدس

$$x^5 = (x^3 x)(x^2 + 1) + x$$

$$\frac{x^5}{x^2 + 1} = x^3 - x + \frac{x}{x^2 + 1}$$

$$I = \int \left(x^3 - x + \frac{x}{x^2 + 1} \right) dx = \int (x^3 - x) dx + \int \frac{x}{x^2 + 1} dx$$

$$= \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C$$

تفريجه الكور

لنكنه $P(x) = P(x)$ دالة كيرت ميكنه $P(x)$ و $Q(x)$ كثيرة حدود و درجته $Q(x)$ كثيرة الحدود في البسط أصغر تماماً من درجته كثيرة الحدود في المقام، بالتاليه يمكنه كتابته الدالة الكيرت $P(x)$ على شكل مجموع ضئيك من الدوال الكيرت البسيطه وبالتاليه فإنه

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

نصن الحالات الآتية:

الحالة الأولى: لنكنه $P(x) = P(x)$ دالة كيرت ميكنه $P(x)$ و $Q(x)$ كثيرة حدود، و درجته $Q(x)$ كثيرة الحدود في البسط أصغر تماماً من درجته كثيرة الحدود في المقام عندها إذا كانت $Q(x)$ تتحلل إلى جداء عوامل بسيطة من الدرجة الأولى وغير مكررة

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \dots + \frac{A_n}{x - a_n}$$

حيث $A_1, A_2, \dots, A_n$ نوابغ عريضة تفصيل الطريقة :
 إسمًا بتوحيد المقامات = ثم نضرب بالمقام المشترك ثم إلى طابقت
 بسنه طريقة المساواة .
 أو نجمع الطريقة الآتية لتعيين A_k نضرب الطرفين بالمقدار
 $(x - a_k)$ ثم نفوضه $x = a_k$ في العلاقة الناتجة
 مثال: انجز التكامل الآتي:

$$\int \frac{x^2 + 1}{(x-1)(x+1)(2-x)} dx$$

الحل: نلاحظ بأن درجة كثير الحدود في البسط أصغر من درجة
 درجة كثير الحدود في المقام بالتالي نضربه الكسر إلى مجموع كسور
 جزئية بالشكل التالي:

$$\frac{x^2 + 1}{(x-1)(x+1)(2-x)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{A_3}{2-x} \quad (*)$$

لتعيين A_1 نضرب x ب $(x-1)$ نجد:

$$\frac{(x^2 + 1)}{(x+1)(2-x)} = A_1 + \frac{A_2(x-1)}{x+1} + \frac{A_3(x-1)}{2-x}$$

نفوضه $x = 1$ في العلاقة الناتجة نجد:

$$\frac{1^2 + 1}{2 \times 1} = A_1 + 0 + 0 \Rightarrow \boxed{A_1 = 1}$$

لتعيين A_2 نضرب طرفي العلاقة (*) ب $(x+1)$ ثم نفوضه

$$x = -1 \text{ في العلاقة الناتجة نجد } A_2 = -\frac{1}{3}$$

لتعيين A_3 نضرب طرفي العلاقة (*) ب $(2-x)$ ثم نفوضه

$$x = 2 \text{ في العلاقة الناتجة نجد } A_3 = \frac{5}{3} \text{ ومنه:}$$

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)(2-x)} = \frac{1}{x-1} - \frac{\frac{1}{3}}{x+1} + \frac{\frac{5}{3}}{2-x}$$

$$\int \frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)(2-x)} dx = \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{5}{3} \int \frac{1}{2-x}$$

$$\ln|x-1| - \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{5}{3} \ln|2-x| + C$$

مثال 3: أوجد التكامل التالي.

$$\int \frac{7x-5}{x^3+x^2-6x} dx$$

الحل:

$$x^3+x^2-6x = x(x^2+x-6) = x(x-2)(x+3)$$

$$\frac{7x-5}{x^3+x^2-6x} = \frac{7x-5}{x(x-2)(x+3)}$$

$$\frac{7x-5}{x(x-2)(x+3)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-2} + \frac{A_3}{x+3} \quad (*)$$

لتعيين A_1 نضرب طرفي العلاقة (*) بـ x نجد:

$$\frac{7x-5}{x(x-2)(x+3)} = \frac{A_1}{x} + \frac{x A_2}{x-2} + \frac{x A_3}{x+3}$$

ونجعل $x=0$ في العلاقة الناتجة نجد:

$$\frac{7(0)-5}{(0-2)(0+3)} = A_1 + 0 + 0 \Rightarrow A_1 = \frac{5}{6}$$

لتعيين A_2 نضرب طرفي العلاقة (*) بـ $(x+3)$ ونجعل $x=-3$:

$$A_2 = \frac{9}{10}$$

لتعيين A_3 نضرب طرفي العلاقة (*) بـ $(x-2)$ ونجعل $x=2$:

$$A_3 = -\frac{26}{15}$$

$$\frac{7x-5}{x^3+x^2-6x} = \frac{7x-5}{x(x-2)(x+3)} = \frac{5}{x} + \frac{9}{x-2} - \frac{26}{x+3}$$

$$\int \frac{7x-5}{x^3+x^2-6x} dx = \frac{5}{6} \int \frac{dx}{x} + \frac{9}{10} \int \frac{dx}{x-2} - \frac{26}{15} \int \frac{dx}{x+3}$$

$$= \frac{5}{6} \ln|x| + \frac{9}{10} \ln|x-2| - \frac{26}{15} \ln|x+3| + C$$

الحالة الثانية:

لنكن $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ دالة كسرية حيث $P(x)$ و $Q(x)$

كشيرة عدد ودرجة كثيرة الحدود في البسط أصغر تماماً من درجة كثيرة الحدود في المقام عندئذ إذا كانت:

$Q(x)$ تتحلل بالأكلة $Q(x) = (x-a)^k$ أي $x-a$ مكرر k مرة حيث k عدد طبيعي عندئذ:

$$\frac{P(x)}{(x-a)^k} = \frac{A_1}{(x-a)^k} + \frac{A_2}{(x-a)^{k-1}} + \frac{A_3}{(x-a)^{k-2}} + \dots + \frac{A_k}{(x-a)^1}$$

حيث $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$ ثوابت عددية يجب تعيينها.

$$\int \frac{x^2}{(x+1)^3}$$

$$\frac{x^2}{(x+1)^3} = \frac{A_1}{(x+1)^3} + \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{A_3}{(x+1)} \quad (*)$$

لتعيين A_1 نضرب (*) بـ $(x+1)^3$

$$x^2 = A_1 + A_2(x+1) + A_3(x+1)^2$$

لتعيين A_1 نضرب (*) بـ x

$$x^2 = A_1 + A_2(x+1) + A_3(x+1)^2$$

نموضف 1- في العلاقة الناتجة

$$A_1 = 1$$

نضرب طرفي العلاقة (*) بـ x ثم نأخذ النهاية $x \rightarrow +\infty$ نجد

$$A_3 = 1$$

نموضف 0- في طرفي العلاقة * نجد

$$A_1 + A_2 + A_3 = 0$$

بالتالي $A_2 = -2$

$$\int \frac{x^2}{(x+1)^3} dx = \int \left(\frac{1}{(x+1)^3} - \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)} \right) dx$$

$$= -\frac{1}{2(x+1)^2} + \frac{2}{(x+1)} + \ln|x+1| + C$$

مثال: انجز التكامل الآتي:

$$I = \int \frac{x^3 + 1}{x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x} dx$$

الحل: لدينا

$$x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x = x(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = x(x-1)^3$$

نقسم البسط $\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}$ فيب x من الدرجة الاولى ~~في~~

و $(x-1)$ مكرر ثلاث مرات عندئذ

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)^3} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{(x-1)}$$

بتوحيد المقام في طرفي المعادلة ثم نضرب الطرفين بالمقام

المشتركة $x(x-1)^3$ نجد

$$x^3 + 1 = A(x-1)^3 + Bx + Cx(x-1) + D(x-1)^2$$

$$x^3 + 1 = (A + D)x^3 + (-3A + C - 2D)x^2 + (3A + B - C + D)x - A$$

بالمطابقة بين الطرفين نجد:

$$A + D = 1$$

$$-3A + C - 2D = 0$$

$$3A + B - C + D = 0$$

$$-A = 1$$

بما أن $A = -1$ و $B = 2$ و $C = 1$ و $D = 2$ فإن:

$$\frac{x^3 + 1}{x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x} = -\frac{1}{x} + \frac{2}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-1}$$

$$\int \frac{x^3 + 1}{x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x} dx = -\int \frac{dx}{x} + 2 \int \frac{dx}{(x-1)^3} + \int \frac{dx}{(x-1)^2} + 2 \int \frac{dx}{x-1}$$

$$\int \frac{x^3 + 1}{x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x} dx = -\ln|x| - \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} + 2\ln|x-1| + C$$

الحالة الثالثة: لنفرض $P(x) = P_n(x)$ ذات كسرة بسيطة

$Q(x)$ كثيرة حدود $Q_m(x)$ ودرجات كثيرة الحدود في البسط

اصغر تماماً منه درجات كثيرة الحدود في المقام عندئذ إذا كان

$Q(x) = (ax^2 + bx + c)^k$ حيث $k \geq 1$ عدد صحيح مثلاً في الحدود التربيعية $ax^2 + bx + c$ مميزة عليه عندئذ الكسرة $\frac{P(x)}{Q(x)}$ يتحلل بالمثل التالي

$$\frac{P(x)}{(ax^2 + bx + c)^k} = \frac{A_1x + B_1}{(ax^2 + bx + c)^k} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^{k-1}} + \dots + \frac{A_kx + B_k}{(ax^2 + bx + c)^1}$$

لتقسيم الثوابت العددية نضرب طرفي المقام بـ $(ax^2 + bx + c)^k$

الملاحظة عامة: لنكون $P(x) = P(x)$ والتكرير هي $P(x)$ و $P(x)$.
 كثيرية حدود ودرجات $Q(x)$ كثير الحدود في البسط اصغر تماماً من
 درجات كثير الحدود في المقام عندئذ إذا كان

~~$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right)$~~

$$\frac{P(x)}{(x-a)^m (ax^2+bx+c)^n} = \frac{A_1}{(x-a)^m} + \frac{A_2}{(x-a)^{m-1}} + \dots + \frac{A_m}{(x-a)} + \frac{B_1x+C_1}{(ax^2+bx+c)^n}$$

مثاله: انحر التكملة الآتية:

الحلقة

نضرب طرفي العلاقة * بـ $(1-x)^2$ ونعوض $1-x$ بـ $A=2$

نضرب طرفي العلاقة * بـ x ثم نحلل $x \rightarrow \infty$



نقوض $x=0$ في طرف العلاقة (1) نجد

$$\boxed{-1 = D - B} \quad \text{--- (2)}$$

نقوض $x=1$ في طرف العلاقة (1) نجد

$$0 = -B - C + D + 1 \quad \text{--- (3)}$$

منه نجد $B=0$ عند $C=0$ و $D=-1$

$$\frac{x^2+2x+1}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x^2+1} \Rightarrow I = \int \left(\frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x^2+1} \right) dx$$

$$= -\frac{2}{x-1} - \arctan(x) + C$$

مثال 7 :

$$\int \frac{7x^2+26x-9}{x^4+4x^3+4x^2-9} dx$$

$$x^4+4x^3+4x^2-9 = x^2(x^2+4x+4) - 9 = x^2(x+2)^2 - (3)^2$$

$$x^4+4x^3+4x^2-9 = (x^2+2x)^2 - (3)^2 = (x^2+2x+3)(x^2+2x-3)$$

$$x^4+4x^3+4x^2-9 = (x^2+2x+3)(x^2+2x-3)$$

$$= (x^2+2x+3)(x-1)(x+3)$$

$$\frac{7x^2+26x-9}{x^4+4x^3+4x^2-9} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} + \frac{C(x+1)}{x^2+2x+3}$$

نضرب الطرفين في $(x^2+2x+3)(x-1)(x+3)$ نصل إلى المعادلات التالية

على

$$7x^2+26x-9 = (A+B+C)x^3 + (5A+B+2C+D)x^2 + (9A+B-3C+2D)x + (9A-3D-3B)$$

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ 5A+B+2C+D=7 \\ 9A+B-3C+2D=26 \\ 9A-3D-3B=-9 \end{cases}$$

بالطريقة = نجد

$$A=1, B=1, C=-2, D=5$$

بالطريقة = نجد

$$\int \frac{7x^2+26x-9}{x^4+4x^3+4x^2-9} dx = \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{x+3} + \int \frac{-2x+5}{x^2+2x+3} dx$$

$$= \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{x+3} - \int \frac{2x+2-7}{x^2+2x+3} dx$$

$$= \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{x+3} - \int \frac{2x+2}{x^2+2x+3} dx + \int \frac{7}{(x+1)^2+2} dx$$

$$\ln|x-1| + \ln|x+3| - \ln|x^2+2x+3| + \frac{7}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + C$$

$$I = \int \frac{x^2+x+5}{(1+x)(x^2+4)} dx$$

بالطريقة = نجد

$$\frac{x^2+x+5}{(1+x)(x^2+4)} = \frac{A}{1+x} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$$

بالطريقة = نجد $A=1, B=0, C=1$

$$I = \int \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{x^2+4} \right) dx = \ln|1+x| + \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

نقدم الآن بعض الأمثلة من أجل ترسيخ المفاهيم السابقة

مثال 9:

$$I = \int \frac{x^4 + 1}{x^3 + x^2 + x + 1} dx$$

$$x^4 + 1 = (x-1)(x^3 + x^2 + x + 1) + 2$$

$$\frac{x^4 + 1}{x^3 + x^2 + x + 1} = \cancel{(x-1)} + \cancel{x^3 + x^2 + x + 1} \cdot \cancel{x-1} + \frac{2}{x^3 + x^2 + x + 1}$$

$$I = \int \left(x-1 + \frac{2}{x^3 + x^2 + x + 1} \right) dx = \int \left(x-1 + \frac{2}{(x+1)(x^2+1)} \right) dx$$

$$I = \int (x-1) dx + \int \frac{2}{(x+1)(x^2+1)} dx = I_1 + I_2$$

$$I_2 = \int \frac{2}{(x+1)(x^2+1)} dx \quad ; \quad I_1 = \int (x-1) dx$$

$$\frac{2}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \quad \text{--- (*)}$$

إيجاد A: نضرب (*) بـ $x+1$ ونعوض $x = -1$ نجد $A = 1$

إيجاد B: نعوض (*) بـ $x \rightarrow \infty$ نجد $A + B = 0$

$$B = -1$$

إيجاد C: نعوض (*) بـ $x = 0$ نجد $C = 1$

$$I_2 = \int \frac{2}{(x+1)(x^2+1)} dx = \int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{-x+1}{x^2+1} \right) dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{-x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} \right) dx$$

$$\ln(|x+1|) - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \arctan x + C_2$$

$$I = \frac{x^2}{2} - x + \ln(|x+1|) - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \arctan x$$

$$I = \int \frac{x^5 + x^3 + 2x^2 + 1}{x^3 + x} dx$$

$$x^5 + x^3 + 2x^2 + 1 = x^2(x^3 + x) + (2x^2 + 1)$$

$$I = \int \left(x^2 + \frac{2x^2 + 1}{x^3 + x} \right) dx = \int \left(x^2 + \frac{2x^2 + 1}{x(x^2 + 1)} \right) dx$$

$$\frac{2x^2 + 1}{x(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}$$

$$C=0, B=1, A=1$$

$$I = \int \left(x^2 + \frac{1}{x} + \frac{x}{x^2 + 1} \right) dx = \frac{x^3}{3} + \ln|x| + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C$$

$$I = \int \frac{x}{x^4 - 16} dx$$

$$\frac{x}{(x+2)(x-2)(x^2+4)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2} + \frac{Cx+D}{x^2+4} \quad (*)$$

$$A = \frac{1}{16} \quad \text{نوجد } A \text{ بضرب الطرفين في } x+2 \text{ ونعوض } x=-2$$

$$B = \frac{1}{16} \quad \text{نوجد } B \text{ بضرب الطرفين في } x-2 \text{ ونعوض } x=2$$

$$\text{نوجد } C \text{ وضرب الطرفين في } x^2+4 \text{ ونعوض } x \rightarrow 0$$

$$C = -\frac{2}{16}, D = 0$$

بالتالي

$$\int \frac{x}{x^4 - 16} dx = \int \left(\frac{\frac{1}{16}}{(x+2)} + \frac{\frac{1}{16}}{(x-2)} - \frac{\frac{2}{16}x}{x^2+4} \right) dx$$

$$\frac{1}{16} \ln|x+2| + \frac{1}{16} \ln|x-2| - \frac{1}{16} \ln(x^2+4) + C$$

$$= \frac{1}{16} \ln \left| \frac{(x+2)(x-2)}{x^2+4} \right| + C = \frac{1}{16} \ln \left| \frac{x^2-4}{x^2+4} \right| + C$$

انتهى الحل مقروء