كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الاولى**

المادة : تحليل رياضي٢

المحاضرة : الرابعة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

دراسة التكاملات من النمط

$$I_m = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^m} \; ; \; m \geq 1$$

عدد صحيح.

(1) $m = 1$

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

$m \geq 2$ بالتالي

$$I_m = I_{n+1} = \frac{1}{2a^2 n} \left[\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + (2n-1) I_n \right].$$

$n \geq 1$ نسمي هذا القانون بالقانون التدريجي.

مثال:

$$\int \frac{dx}{(x^2+2)^2}$$

$a^2 = 2$

$$I_2 = I_{1+1} = \frac{1}{2 \times 2 \times 1} \left[\frac{x}{(x^2+2)^2} + I_1 \right]$$

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) + C$$

$$I_2 = \frac{x}{4(x^2+2)} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) + C$$

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

مثال: أوجد التكامل:

$$I_3 = \int \frac{dx}{(x^2+4)^3}$$

$$I_3 = I_{2+1} = \frac{1}{2\times 4\times 2}\left[\frac{x}{(x^2+4)^2} + 3I_2\right]$$

$$I_3 = \frac{1}{16}\left[\frac{x}{(x^2+4)^2} + 3I_2\right]$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+4)^2} \Rightarrow I_2 = I_{1+1} = \frac{1}{2\times 4\times 1}\left[\frac{x}{x^2+4} + (2I_1)\right]$$

$$I_2 = \frac{1}{8}\left(\frac{x}{x^2+4} + I_1\right)$$

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

$$I_1 = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

نعوض بالعكس بدلك تراجعي نجد:

$$I_2 = \frac{x}{8(x^2+4)} + \frac{1}{16}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{8}C_1$$

$$I_3 = \frac{x}{16(x^2+4)^2} + \frac{3x}{128(x^2+4)} + \frac{3}{256}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

دراسة التكامل من النمط:

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

لدراسة هذا التكامل نميز ثلاث حالات حسب مميز ثلاثي الحدود

① $\Delta = b^2-4ac > 0$ عندئذ لثلاثي الحدود جذران

$$\alpha = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad , \quad \beta = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta).$$

$$I = \int \frac{dx}{a(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{(x-\alpha)(x-\beta)}$$

لنحلل العدد $\frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)}$ إلى مجموع كسرين بسيطين

$$\frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta}$$

$$I = \frac{1}{a}\int\left(\frac{A}{x-\alpha}+\frac{\beta}{x-\beta}\right)dx = \frac{A}{a}\ln|x-\alpha| + \frac{\beta}{a}\ln|x-\beta| + C$$

② ax^2+bx+c عندئذ $\Delta = b^2-4ac$ ثلاثي الحدود

جذره مضاعف هو

$$\alpha = -\frac{b}{2a}$$

$$ax^2+bx+c = a(x-\alpha)^2$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$I = \int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{(x-k)^2} = -\frac{1}{a}\times\frac{1}{(x-k)}+c$$

(3) $\Delta<0$ ثالثة الحدود.

ax^2+bx+c المقدار جذور حقيقية عندئذٍ نتمم إلى مربع كامل

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$

$$= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)$$

$$= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)$$

$$= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right).$$

نضع $r = -\frac{\Delta}{4a^2}$

$$I = ax^2+bx+c = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+r^2\right)$$

$$I = \int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+r^2}$$

نضع $T = x+\frac{b}{2a}$ و $dT = dx$

$$I = \frac{1}{a}\int \frac{dT}{T^2+r^2}$$

$$= \frac{1}{a}\times\frac{1}{r}\arctan\left(\frac{T}{r}\right)+c$$

$$= \frac{1}{r.a}\arctan\left(\frac{T}{r}\right)+c = \frac{1}{r.a}\arctan\left(\frac{2ax+b}{2ar}\right)+c$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال:

$$I = \int \frac{dx}{2x^2+9x-5}$$

$a=2,\ b=9,\ c=-5$

$\Delta = b^2 - 4ac = 81 + 40 = 121 > 0$

$x = \frac{1}{2},\ 13 = -5$

$$(2x^2+9x-5) = 2(x-\tfrac{1}{2})(x+5)$$

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-\frac{1}{2})(x+5)} \quad \frac{1}{(x-\frac{1}{2})(x+5)} = \frac{A}{x-\frac{1}{2}} + \frac{13}{x+5} \quad *$$

لإيجاد A: نضرب طرفي العلاقة * بـ $(x-\frac{1}{2})$ نجد:

$$\frac{1}{x+5} = A + \frac{B(x-\frac{1}{2})}{x+5}$$

ثم نعوض في العلاقة الناتجة $x=\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{x+5} = A \longrightarrow \boxed{A = \frac{2}{11}}$$

لإيجاد B نضرب طرفي العلاقة * بـ $(x+5)$ ثم نعوض $x=-5$ بالعلاقة الناتجة

$$13 = -\frac{2}{11}$$

$$I = \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{2}{11}}{x-\frac{1}{2}} - \frac{\frac{2}{11}}{x+5}\right)dx$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$= \frac{1}{11} \ln|x - \frac{1}{2}| - \ln|x+5| + C$$

$$= \frac{1}{11} \ln\left|\frac{x-\frac{1}{2}}{x+5}\right| + C$$

مثال:

$$I = \int \frac{dx}{x^2 - 6x + 9}$$

$\Delta = 0 \quad , \quad x = 3$

$$I = \int \frac{dx}{(x-3)^2} = -\frac{1}{x-3} + C$$

مثال:

$$I = \int \frac{dx}{2x^2 - 12x + 27}$$

$\Delta = -72 < 0$

$$2x^2 - 12x + 27 = 2\left(x^2 - 6x + \frac{27}{2}\right)$$

$$= 2\left(x^2 - 6x + 9 - 9 + \frac{27}{2}\right)$$

$$= 2\left((x-3)^2 + \frac{9}{2}\right)$$

نضع $T = x - 3 \quad , \quad dT = dx$

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{dT}{\frac{9}{2} + T^2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\frac{3}{\sqrt{2}}} \arctan\left(\frac{T}{3/\sqrt{2}}\right) + C$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{\sqrt{2}T}{3}\right) + C$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{\sqrt{2}(x-3)}{3}\right) + C$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

دراسة التكامل حسب النمط:

$$I = \int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}\,dx$$

لدراسة التكامل I نكتبه بالشكل

$$\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}\,dx = \int \frac{A(2ax+b)}{ax^2+bx+c}\,dx + \int \frac{B}{ax^2+bx+c}\,dx$$

حيث A و B ثوابت نطلب تعيينها

* نوحد المقامين ثم نضرب بـ ax^2+bx+c نجد:

$$Mx+N = A(2ax+b)+B$$

بالمطابقة نحصل على A و B

$$I = A\ln|ax^2+bx+c| + BI_1$$

ثم نوافق $I_1 = \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ سابقاً.

مثال:

$$I = \int \frac{2x+1}{x^2-3x+2}\,dx$$

نكتب بالشكل

$$\int \frac{2x+1}{x^2-3x+2}\,dx = \int \frac{A(x-3)}{x^2-3x+2}\,dx + \int \frac{B}{x^2-3x+2}$$

نوحد المقامين ونضرب بـ x^2-3x+2 نجد:

$$2x+1 = A(2x-3)+B$$

$$\boxed{A=1} \quad , \quad \boxed{B=4}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$B=4$ ، $A=1$

$I = I_1 + I_2$ ، $I_1 = \int \frac{2x-3}{x^2-3x+2}\,dx$

$I_2 = \int \frac{4\,dx}{x^2-3x+2}$

$I_1 = \ln|x^2-3x+2| + C_1$

$I_2 \int \frac{4dx}{x^2-3x+2} = \int \frac{4}{(x-2)(x-1)}\,dx.$

$\frac{4}{(x-2)(x-1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1}$ ..... *

نضرب * بـ $(x-2)$ ثم نعوض $x=2$ بالعلاقة الناتجة A:

$A=4$

نضرب (*) بـ $(x-1)$ ثم نعوض $x=1$ في هذه العلاقة الناتجة نجد B:

$B=-4$

$I_2 = \int \left(\frac{4}{x-2} - \frac{4}{x-1}\right)dx$

$= 4\ln|x-2| - 4\ln|x-1| + C_2 = 4\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + C$

$I = I_1 + I_2 = \ln|x^2-3x+2| + 4\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + C$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

حالة التكامل من النمط:

$$I = \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^m}$$

نميز الحالات:

$$\Delta = b^2 - 4ac > 0$$

$$ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta)$$

$$I = a^{\frac{1}{m}} \int \frac{dx}{(x-\alpha)^m (x-\beta)^m}$$

نحلل الكسر:

$$\frac{1}{(x-\alpha)^m (x-\beta)^m}$$

إلى مجموع كسور مرئية:

$$\frac{1}{(x-\alpha)^m (x-\beta)^m} = \frac{A_1}{(x-\alpha)^m} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^{m-1}} + \dots + \frac{A_m}{x-\alpha} + \frac{B_1}{(x-\beta)^m}$$

$$+ \frac{B_2}{(x-\beta)^{m-1}} + \dots + \frac{B_m}{x-\beta}$$

(2) $\Delta = 0$ ، $\alpha = -\frac{b}{2a}$

من أجل مضاعف ax^2+bx+c

$$ax^2+bx+c = a(x-\alpha)^2$$

$$I = \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^m} = \frac{1}{a^m} \int \frac{dx}{(x-\alpha)^{2m}}$$

$$= \frac{1}{a^m} \times \frac{(x-\alpha)^{-2m+1}}{-2m+1} + C$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

③ $\Delta < 0$ بالاتمام إلى مربع كامل.

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$
$$= a\left(x^2+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)$$
$$= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right).$$

نضع $r = -\frac{\Delta}{4a^2}$

$$I = \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^m} = \frac{1}{a^m}\int \frac{dx}{\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+r^2\right)}$$

نضع $x+\frac{b}{2a} = T$

$$dT = dx$$
$$I = \frac{1}{a^m}\int \frac{dT}{(T^2+r^2)^m}$$

نطبق الدستور التدريجي فنحصل على I.

مثال:

$$I = \int \frac{dx}{(x^2-x-2)^2}$$

الحل: x^2-x-2 تملك جذرين مختلفين.

$x=2,\ \beta=-1$

$$I = \int \frac{dx}{(x^2-x-2)^2} = \int \frac{dx}{(x-2)^2(x+1)^2}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\frac{1}{(x+1)^2(x-2)^2} = \frac{A_1}{(x+1)^2} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{B_1}{(x-2)^2} + \frac{B_2}{x-2} \quad \cdots (*)$$

نضرب طرفي (*) بـ $(x+1)^2$ ثم نعوض $x=-1$ في العلاقة الناتجة نجد A_1

$$A_1 = \frac{1}{9}$$

نضرب طرفي (*) بـ $(x-2)^2$ ونعوض في العلاقة الناتجة B_1

$$x=2 \Rightarrow B_1 = \frac{1}{9}$$

* نضرب طرفي العلاقة * بـ x ونجعل $x \to \infty$

$$0 = A_1 + B_2 \quad \cdots (1)$$

* نعوض في طرفي العلاقة * بـ $x=0$ نجد أن

$$\frac{1}{4} = A_1 + A_2 + \frac{1}{4}B_1 - \frac{1}{2}B_2$$

$$A_2 - \frac{1}{2}B_2 = \frac{1}{9} \quad \cdots (2)$$

نحل 1 و 2 حل مشترك

$$A_2 = \frac{2}{27}, \quad B_2 = -\frac{2}{27}$$

$$I_1 = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{(x+1)^2} + \frac{2}{27}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{9}\int \frac{dx}{(x-2)^2} - \frac{2}{27}\int \frac{dx}{x-2}$$

$$= -\frac{1}{9(x+1)} + \frac{2}{27}\ln|x+1| - \frac{1}{9(x-2)} - \frac{2}{27}\ln|x-2| + C$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

دراسة التكامل من النمط

$$I=\int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^m}$$

لدراسة التكامل من النمط $I\int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^m}$ نكتبه بالشكل

$$\int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^m}dx=\int \frac{A(2ax+b)}{(ax^2+bx+c)^m}dx+\int \frac{B}{(ax^2+bx+c)^m}dx$$

حيث A و B ثوابت يطلب تعيينها

نشتق الطرفين ثم نضرب بـ $(ax^2+bx+c)^m$ نجد

$$Mx+N=A(2ax+b)+B$$

بالمطابقة نحصل على A و B بالتالي

$$I=I=\frac{A\times(ax^2+bx+c)^{-m+1}}{-m+1}+BI_1$$

حيث $I_1=\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^m}$ هذا التكامل تم مناقشته سابقاً

مثال 10:

$$I=\int \frac{2x+2}{(x^2-3x+2)^2}dx$$

الحل: نكتب I بالشكل

$$\int \frac{2x+2}{(x^2-3x+2)^2}dx=\int \frac{A(2x-3)}{(x^2-3x+2)^2}dx+\int \frac{B}{(x^2-3x+2)^2}dx$$

نشتق الطرفين ثم نضرب الطرفين بـ $(x^2-3x+2)^2$ نجد

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$2x+2 = A(2x-3)+B$

$2x+2 = 2Ax-3A+B$

بالمطابقة نجد $A=1$ ، $B=5$ بالتالي

$$I = \int \frac{2x-3}{(x^2-3x+2)^2}dx + 5\int \frac{dx}{(x^2-3x+2)^2} = -\frac{1}{x^2-3x+2} + 5I_1$$

حيث:

$$I_1 = \int \frac{dx}{(x^2-3x+2)^2} \quad , \quad I_1 = \int \frac{dx}{(x-2)^2(x-1)^2}$$

نحلل الكسر $\frac{1}{(x-2)^2(x-1)^2}$ إلى مجموع كسور جزئية بالشكل

$$\frac{1}{(x-2)^2(x-1)^2} = \frac{A_1}{(x-2)^2} + \frac{A_2}{(x-2)} + \frac{B_1}{(x-1)^2} + \frac{B_2}{(x-1)} \quad \cdots (*)$$

A_1: نضرب طرفي العلاقة $(*)$ بـ $(x-2)^2$ ثم نعوض $x=2$ في العلاقة نجد $A_1=1$

B_1: نضرب طرفي العلاقة $(*)$ بـ $(x-1)^2$ ثم نعوض $x=1$ في العلاقة الناتجة نجد $B_1=1$

نضرب طرفي العلاقة $(*)$ بـ x ثم نجعل $x \to \infty$

$$A_2+B_2=0 \quad \cdots (1)$$

نعوض $x=0$ في طرفي العلاقة $(*)$ نجد:

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4}A_1 - \frac{1}{2}A_2 + B_1 - B_2$$

$$A_2+2B_2 = 2 \quad \cdots (2)$$

بالتالي:

نحل (1) و (2) حل مشترك نجد $A_2=-2$ ، $B_2=2$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$I_1 = \int \frac{dx}{(x^2-3x+2)^2} = \int \frac{dx}{(x-2)^2} - 2\int \frac{dx}{(x-2)} + \int \frac{dx}{(x-1)^2} + 2\int \frac{dx}{x-1}$$

$$I_1 = -\frac{1}{x-2} - 2\ln|x-2| - \frac{1}{x-1} + 2\ln|x-1| + C_1$$

$$I = -\frac{1}{x^2-3x+2} + 5\left(-\frac{1}{(x-2)} - 2\ln|x-2| - \frac{1}{(x-1)} + 2\ln|x-1| + C\right)$$

$$I = -\frac{1}{x^2-3x+2} - \frac{5}{x-2} - \frac{5}{x-1} + 10\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right| + C$$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z