كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الاولى**

المادة : تحليل رياضي٢

المحاضرة : الثالثة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

قواعد هامة:

1) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$

2) $\int \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}\,dx = \sqrt{f(x)} + c$

3) $\int f'(x)\,(f(x))^n\,dx = \frac{(f(x))^{n+1}}{n+1} + c \; ; n \neq -1$

4) $\int f'(x)\,e^{f(x)}\,dx = e^{f(x)} + c$

أمثلة:

$I_1 = \int \frac{x^3}{1+x^3} = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{1+x^3}\,dx = \ln|1+x^3| + c$

$I_2 = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\,dx = \sqrt{x^2+1} + c$: الحل

الحل: $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int x\,(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{2}\int 2x\,(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2}\,\frac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = (x^2+1)^{\frac{1}{2}} + c = \sqrt{x^2+1} + c$

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

$I_3 = \int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx$

$= -\ln|\cos x| + c$

$I_4 = \int \sin x\, e^{\cos x}\,dx = -\int -\sin x\, e^{\cos x}\,dx = -e^{\cos x} + c$

$I_5 = \int \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}\,dx = 2\int \frac{e^x}{2\sqrt{e^x+1}} = 2\sqrt{e^x+1} + c$

$I_6 = \int \sin x \cos^3 x\,dx = -\int -\sin x \cos^3 x =$

$-\frac{(\cos x)^4}{4} + c$

$I_7 = \int \sh x \cdot \sqrt{1+\ch x}\,dx = \int \sh x\,(1+\ch x)^{\frac{1}{2}}\,dx$

$= \frac{(1+\ch x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}(1+\ch x)^{\frac{3}{2}}$

$= \frac{2}{3}\sqrt{(1+\ch x)^3}$

$I_8 = \int \frac{dx}{e^{-x}+1} = \ln|e^x+1| + c$

$I_9 = \int \sh x\, e^{2\ch x} = \frac{1}{2}\int 2\sh x\, e^{2\ch x} = \frac{1}{2}e^{2\ch x} + c$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

- الطريقة الرئيسية في المكاملات

① الطريقة المباشرة: تعتمد على رد التكامل المعطى إلى تكاملات شهيرة وذلك بالاعتماد على خواص التكامل غير المحدد وبعض العلاقات الجبرية

أمثلة:

$$I_1 = \int 2^x \cdot 5^{2x}\,dx = \int 2^x \cdot 25^x\,dx = \int 50^x\,dx = \frac{50^x}{\ln(50)} + c$$

$$I_2 = \int \cot^2 2x\,dx = \int \frac{\cos^2 2x}{\sin^2 2x}\,dx = \int \frac{1-\sin^2 2x}{\sin^2 2x}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{\sin^2 2x} - 1\,dx = -\frac{1}{2}\cot 2x - x + c$$

$$I_3 = \int \left(\sin\frac{x}{3} + \cos\frac{x}{3}\right)^2 dx$$

$$= \int \left(\sin^2\frac{x}{3} + \cos^2\frac{x}{3} + 2\sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}\right)dx$$

$$= \int \left(1 + 2\sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}\right)dx = \int \left(1 + \sin\frac{2x}{3}\right)dx$$

$$= x - \frac{3}{2}\cos\frac{2x}{3} + c$$

$$I_4 = \int \frac{\text{chx} - \text{shx}}{\text{chx} + \text{shx}}\,dx = \int \frac{(\text{chx}-\text{shx})(\text{chx}+\text{shx})}{(\text{chx}+\text{shx})(\text{chx}-\text{shx})}$$

ضربنا البسط والمقام بمرافق المقام

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$= \int \frac{(chx - shx)^2}{ch^2x - sh^2x} dx = \int \left(\frac{ch^2x - 2shx\,chx + sh^2x}{ch^2x - sh^2x} \right) dx$$

$$= \int \frac{ch2x - sh2x}{1} dx = \frac{1}{2} sh2x - \frac{1}{2} ch2x + C$$

$$I_5 = \int \frac{dx}{x \ln x} = \frac{1}{\ln(x)} = \ln|\ln(x)| + C$$

طريقة تغيير المتحول: إذا لم يكن من السهولة رد التكامله المعطى إلى تكاملات موجودة في جداول التكاملات الشهيرة، فإننا نضطر أحياناً لتغيير متحول المكاملة x إلى متحول جديد T وفق العلاقة

$x = \varphi(T)$ حيث $\varphi(T)$ دالة مستمرة ومشتقها الأول لها مستمر أيضاً وعندئذٍ يكون

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(T))\,\varphi'(T)\,dT$$

نوجد هذا التكامله بدلالة T ثم نبدل فيه ناتج التكامله الناتج بما يساويه بدلالة x.

مثال

$$I_1 = \int \frac{x^3}{(x-1)^2} dx$$

الحل: نفرض $T = x - 1 \Leftarrow x = T + 1$

$$dT = dx$$

$$\int \frac{(T+1)^3}{T^2} = \int \frac{T^3 + 3T^2 + 3T + 1}{T^2} = \int T + 3 + \frac{3}{T} + \frac{1}{T^2} = \frac{T^2}{2} + 3T + 3\ln|T| - \frac{1}{T} + C$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال:

$$I = \int \sqrt{3x+1}\, dx$$

بفرضه $T = \sqrt{3x+1}$

$$dT = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}\, dx \longrightarrow dx = \frac{2}{3}\sqrt{3x+1} = \frac{2}{3}T\, dT$$

$$I = \int T \cdot \frac{2}{3}T\, dT = \int \frac{2}{3}T^2\, dT = \frac{2}{3}\int T^2\, dT$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{T^3}{3} = \frac{2T^3}{9} + C$$

مثال:

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{x}} \sin\sqrt{x}\, dx$$

بفرضه $T = \sqrt{x}$

$$dT = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$dT = \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx$$

$$dx = 2\sqrt{x}\, dT = \int \frac{1}{t} \sin T \cdot 2\sqrt{x}\, dT$$

$$= \int 2\sin T\, dT = -2\cos T + C$$

$$= -2\cos\sqrt{x} + C$$

مثال:

$$I = x\sqrt{3-x}\, dx \longrightarrow T = 3 - x$$

$$dT = -dx \longrightarrow x = 3 - T$$

$$= -\int (3-T)\sqrt{T}\, dT = \int (T-3)\sqrt{T}\, dT$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$= \int (t^{\frac{3}{2}} - 3t^{\frac{1}{2}})\,dt = \frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - 2t^{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} - 2t^{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{5}\sqrt{(3-x)^5} - 2\sqrt{(3-x)^3} + c$$

الآن نقدم قواعد سهلة لبعض التكاملات:

حيث $a>0$ ، $b>0$

$f(x)$ التابع	تكامل التابع $f(x)$
① $f(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2x^2}}$	$\frac{1}{a}\arcsin\frac{bx}{a}+c$
② $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$	$\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+c$
③ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$	$\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})+c$
④ $f(x) = \frac{1}{a^2+b^2x^2}$	$\frac{1}{ab}\arctan\frac{bx}{a}+c$
⑤ $f(x) = \frac{1}{a^2-b^2x^2}$	$\frac{1}{2ab}\ln\left\lvert\frac{a+bx}{a-bx}\right\rvert+c$

اثبات الحالة ④:

$$\int \frac{dx}{a^2+b^2x^2} \stackrel{?}{=} \frac{1}{ab}\arctan\frac{bx}{a}+c$$

$$I = \int \frac{dx}{a^2+b^2x^3} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{bx}{a}\right)^2}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نفرض $T = \frac{bx}{a} \Rightarrow dT = \frac{b}{a}dx$

$$I = \frac{1}{a^2} \times \frac{a}{b} \int \frac{dT}{1+T^2} = \frac{1}{ab} \int \frac{dT}{1+T^2} = \frac{1}{ab} \arctan T + c$$

$$= \frac{1}{ab} \arctan \frac{bx}{a} + c$$

مثال:

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5x}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2+25}\right) + c$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2-2}\right) + c$$

$$I_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{5-2x^2}} = \int \frac{1}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \arcsin \frac{\sqrt{2}x}{5} + c$$

$$I_4 = \int \frac{dx}{7+2x^2} = \int \frac{1}{(\sqrt{7})^2+(\sqrt{2})^2x^2} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{7}} \arctan \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{7}} + c$$

$$I = \int \frac{dx}{2-4x^2} = \int \frac{1}{2-4x^2} = \int \frac{1}{(\sqrt{2})^2-(2)^2x^2} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2}+2x}{\sqrt{2}-2x} \right| + c$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

3- طريقة المكاملة بالتجزئة

لتكن لدينا الدالتان $u=u(x)$ و $v=v(x)$ القابلتان للاشتقاق حيث المشتق الأول لكل منهما دالة مستمرة على مجال ما يمثل دستور المكاملة بالتجزئة بالعلاقة التالية

$$\int u\,dv = u.v - \int v.du$$

مثال: استخدم طريقة المكاملة بالتجزئة لإيجاد

$$I = \int \frac{x}{\sin^2 x}\,dx$$

$u = x \qquad du = dx$

$dv = \frac{dx}{\sin^2 x} \Rightarrow v = -\cot x$

$$I = \int u.dv = -x\cot x - \int -\cot x\,dx$$

$$= -x\cot x + \ln|\sin x| + C$$

مثال:

$$I = \int x\cos x\,dx$$

$u = x, \qquad du = dx$

$dv = +\cos x \Rightarrow v = \sin x$

$$\int u.dv = u.v - \int v.du = x\sin x - \int \sin x\,dx$$

$$= x\sin x + x\cos x + C$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ملاحظة: إنّ دستور التكامل بالتجزئ يسهّل علينا ما سبق التكامل إذا أمسنا اختيار كلّ من dv و u فمثلاً في التكامل السابق في حالة فرضنا $u=\cos x$ و $dv=x\,dx$ لحصلنا على تكامل أصعب من التكامل I لذلك نصيحة الجزء الأكبر من التكاملات في ثلاث مجموعات لكل منها فرضية لـ u الخاصة مع التأكيد على أنّ المجموعات الثلاث لا تشمل كلّ التكاملات التي يمكن حلّها بالتكامل بالتجزئ.

المجموعة الأولى:

$\int P_n(x)\arcsin(bx)\,dx$ و $\int P_n(x)\arccos(bx)\,dx$

$\int P_n(x)\arctan(bx)\,dx$ و $\int P_n(x)\operatorname{arccot}(bx)\,dx$

$\int P_n(x)\ln^m(bx)\,dx$.

التكاملات من الشكل حيث $P_n(x)$ كثير حدود من الدرجة n تحلّ بالتجزئ حيث نفرض $dv=P_n(x)dx$ والباقي في العبارة التكاملة هو u.

مثال: أوجد التكامل:

$I=\int x\ln(x)\,dx$

$u=\ln x \Rightarrow u'=\frac{1}{x}$

$dv=x \Rightarrow v=\frac{x^2}{2}$

$\int u\,dv = u\cdot v-\int v\,du = \ln x\cdot\frac{x^2}{2}-\int\frac{x}{2}$

$=\ln x\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{x^2}{4}+C$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال:

$$I = \int \arcsin x\,dx$$

$$u = \arcsin x \Rightarrow u' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$$

$$dv = dx \Rightarrow v = x$$

$$I = x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$= x\arcsin x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}} \quad ; \quad x\arcsin x - \frac{1}{2}$$

$$I = x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$= x\arcsin x - \int x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= x\arcsin x + \frac{1}{2}\int (-2x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$I = x\arcsin x + \frac{1}{2}\,\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C$$

$$= x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

مثال:

$$I = \int \ln x\,dx$$

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}\,dx$$

$$dv = dx \Rightarrow v = x$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$J = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x}{2}\,dx$$

$$\boxed{J = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + c}$$

$$I = \frac{x^2}{2}\ln^2(x) - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^4}{4} + c$$

مثال: 5

$$I = \int x \arctan x\,dx$$

$$u = \arctan x \;;\; du = \frac{dx}{1+x^2}$$

$$dv = x \;;\; v = \frac{x^2}{2}$$

$$I = \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\arctan x + c$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$I = x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} = x\ln x - x + C$

مثال:

$I = \int x^3 \ln x \, dx \Rightarrow$

$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}$

$dv = x^3 \Rightarrow v = \frac{x^4}{4}$

$I = \int u\,dv = \frac{x^4}{4}\ln x - \int \frac{x^4}{4} \cdot \frac{1}{x}$

$= \frac{x^4}{4}\ln x - \int \frac{x^3}{4} = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{4} \times \frac{x^4}{4} + C$

$= \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{16}x^4 + C$

مثال:

$I = \int x \ln^2 x \, dx$

$u = \ln^2(x) \Rightarrow du = 2\ln(x) \cdot \frac{1}{x} dx$

$dv = x \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$

$I = \frac{x^2}{2}\ln^2(x) - \int x \ln x \, dx$

نضع $J = \int x \ln x \, dx$

$u = \ln x \Rightarrow u' = \frac{1}{x} dx$

$dv = x\,dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

المجموعة الثانية: التكاملات من الشكل

$\int P_n(x) e^{ax} dx$

$\int P_n(x) \sin ax\, dx$ حيث P_n كثير حدود من الدرجة n و a ثابت حقيقي

$\int P_n(x) \cos ax\, dx$

وتحل بالتجزئة حيث نفرض $u = P_n(x)$ والباقي في العبارة المكاملة هو dv

مثال:

$$I = \int (x^2 - 6x + 2) e^{3x} dx$$

$u = x^2 - 6x + 2$, $u' = 2x - 6$

$dv = e^{3x} \Rightarrow v = \frac{1}{3} e^{3x}$

$$\frac{1}{3}(x^2 - 6x + 2) e^{3x} - \int \frac{1}{3} e^{3x} (2x - 6)$$

$$= \frac{1}{3}(x^2 - 6x + 2) e^{3x} - \frac{2}{3} \int (x - 3) e^{3x}$$

$J = (x - 3) e^{3x}$

$u = x - 3 \Rightarrow du = 1$

$dv = e^{3x} \Rightarrow v = \frac{e^{3x}}{3}$

$$= \frac{1}{3}(x - 3) e^{3x} - \int \frac{1}{3} e^{3x} = \frac{1}{3}(x - 3) e^{3x} - \frac{1}{3} \int e^{3x}$$

$$= \frac{1}{3}(x - 3) e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x} + C$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$I = \frac{1}{3}(x^2-6x+2)e^{3x} - \frac{2}{9}(x-3)e^{3x} + \frac{2}{27}e^{3x} + c$$

المجموعة الثالثة: التكاملات من الشكل

$$I = \int e^{ax}\cos bx\,dx$$

$$I = \int e^{ax}\sin bx\,dx \quad ; \quad a,b \in \mathbb{R}$$

نحل بالتجزئة حيث نفرض أن $u(x)$ هو أما الدالة الأسية أو المثلثية مما يبقى داخل العبارة التكاملية هو dv

توضيح:

هنا نطبق قانون التكاملة بالتجزئة مرتين فنحصل على معادلة نظهر فيها I نوجد منها قيمة I مع الإشارة إلى أنه اختيارنا dv في هذه التكاملات غير مهم.

مثال: أوجد التكامل:

$$I = \int e^{2x}\sin 3x\,dx$$

$$u = e^{2x} \Rightarrow du = 2e^{2x}dx$$

$$dv = \sin 3x \Rightarrow v = -\frac{1}{3}\cos 3x$$

$$I = -\frac{1}{3}\cos 3x\,e^{2x} + \frac{2}{3}\underbrace{\int e^{2x}\cos 3x\,dx}_{J}$$

$$u = e^{2x} \; ; \; du = 2e^{2x}dx$$

$$dv = \cos 3x \; ; \; v = \frac{1}{3}\sin 3x$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$J = e^{2x} \cdot \frac{1}{3}\sin 3x - \int 2e^{2x} \frac{1}{3}\sin 3x$$

$$= e^{2x}\frac{1}{3}\sin 3x - \frac{2}{3}\int e^{2x}\sin 3x$$

$$J = \frac{1}{3}\sin 3x\, e^{2x} - \frac{2}{3} I$$

$$I = -\frac{1}{3}\cos 3x\, e^{2x} + \frac{2}{9} e^{2x}\sin 3x - \frac{4}{9} I$$

$$I + \frac{4}{9} I = -\frac{1}{3} e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{9} e^{2x}\sin 3x$$

$$\frac{13}{9} I = -\frac{1}{3} e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{9}\sin 3x\, e^{2x}$$

$$I = \frac{9}{13} e^{2x}\left(-\frac{1}{3}\cos 3x + \frac{2}{9}\sin 3x\right) + c$$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة