كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الاولى**

المادة : تحليل رياضي٢

المحاضرة : الثانية/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

4

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

مفهوم التكامل غير المحدد

تعريف: (مفهوم الدالة الأصلية)

يقال عن الدالة $F(x)$ بأنها دالة أصلية للدالة $f(x)$ على المجال I، إذا تحققت كلا من الشرطين:

① $F(x)$ دالة اشتقاقية على المجال I

② $F'(x) = f(x)$

مثال: $F(x) = \sqrt{1-x^2}$ هي دالة أصلية لـ $f(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ على المجال $I =]-1,1[$

مثال: الدالة $F(x) = -\cos 2x$ هي دالة أصلية لـ $f(x) = 2\sin 2x$ على $I = \mathbb{R}$

ملاحظة: إذا كانت $F(x)$ دالة أصلية لـ $f(x)$ على I عندئذٍ $(F(x)+C)$ دالة أصلية لـ $f(x)$ على المجال I حيث c ثابت حقيقي.

تعريف: نسمي مجموعة جميع الدوال الأصلية $(F(x)+C)$ للدالة $f(x)$ على المجال I بالتكامل غير المحدد ويرمز له بالرمز

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

(العبارة التكاملية، الدالة التكاملة، متغير التكامل)

الخواص الأساسية للتكامل غير المحدد

① $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

② $d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,d(x)$

③ $\int k f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$

④ $\int (f(x) + g(x) - h(x))\,dx$

$= \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx - \int h x\,dx$

⑤ $\int f(x)\,dx = \int f(t)\,dt$

أي لا يتغير التكامل المحدد لمالة إذا غيرنا رمز متحول التكامل

ندرس الآن قواعد لحساب بعض التكاملات غير المحددة لمثال

سرعة

المجموعة الأولى:

$f(x)$ التابع	تكامل التابع $f(x)$
$f(x) = a\ ;\ a \in \mathbb{R}$	$\int f(x) = ax + C$
$f(x) = x^n\ ;\ n \neq -1$	$f(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$
$f(x) = \frac{1}{ax+b}$	$\frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert + C$
$f(x) = e^{ax}$	$\frac{1}{a}e^{ax} + C$
$f(x) = a^x\ ;\ a > 0$	$\frac{a^x}{\ln(a)} + C$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال:

$$f(x) = x^3 + \frac{3}{x} + \frac{1}{\frac{1}{2}x+1}$$

$$\int f(x) = \frac{x^4}{4} + 3\ln|x| + 2\ln\left|\frac{1}{2}x+1\right| + C.$$

مثال:

$$\int (\pi + e^{\pi x} + 9^x)\,dx = \pi x + \frac{1}{\pi} e^{\pi x} + \frac{9^x}{\ln(9)} + C$$

مثال:

$$\int 2^x \cdot 3^{2x} = \int 2^x \cdot 9^x = \int 18^x = \frac{18^x}{\ln(18)} + C$$

الجموعة الثانية:

$f(x)$ التابع	تكامل التابع $f(x)$
$f(x) = \sin x$	$-\cos x + C$
$f(x) = \sin \alpha x$	$-\frac{1}{\alpha}\cos \alpha x + C$
$f(x) = \cos x$	$\sin x + C$
$f(x) = \cos \alpha x$	$\frac{1}{\alpha}\sin \alpha x + C$
$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$
$f(x) = \frac{1}{\cos^2 \alpha x}$	$\frac{1}{\alpha}\tan(\alpha x) + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x + C$
$\frac{1}{\sin^2 \alpha x}$	$-\frac{1}{\alpha}\cot x + C$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال:

$$I = \int \left(\sin\frac{1}{2}x + \frac{1}{\sin^2 3x}\right) dx = -2\cos\left(\frac{1}{2}x\right) - \frac{1}{3}\cot 3x + C$$

مثال:

$$I = \int (\sin 2x + \cos 2x)^2 dx$$

$$= \int \sin^2 2x + \cos^2 2x + 2\sin 2x \cos 2x$$

$$= \int (1 + \sin 4x) = x - \frac{1}{4}\cos 4x + C.$$

مثال:

$$\int \sin^2 3x \, dx = \int \left(\frac{1-\cos 6x}{2}\right) dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 6x\right)$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}\sin 6x + C.$$

المجموعة الثالثة:

$f(x)$ التابع	تكامل التابع $f(x)$
$f(x) = \sh x$	$\ch x + C$
$f(x) = \sh kx$	$\frac{1}{k}\ch kx + C$
$f(x) = \ch x$	$\sh x + C$
$f(x) = \ch kx$	$\frac{1}{k}\sh kx + C$
$f(x) = \frac{1}{\ch^2 x}$	$\th x + C$
$f(x) = \frac{1}{\sh^2 x}$	$-\cth x + C$
$f(x) = \frac{1}{\sh^2 kx}$	$-\frac{1}{k}\cth kx + C$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال:

$$I = \int \left(sh2x + \frac{3}{sh^2 5x}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2} ch2x - \frac{3}{5} cTh(5x) + C$$

مثال:

$$I = \int (chx - shx)^2 dx$$

$$= \int (ch^2 x - 2shx\,chx + sh^2 x)$$

$$= \int (ch2x - sh2x) = \frac{1}{2} sh2x - \frac{1}{2} ch2x + C$$

المجموعة الرابعة:

تكامل التابع $f(x)$	التابع $f(x)$
$\arcsin x + c$ أو $-\arccos x + C$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$Ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$Ln(x + \sqrt{x^2-1}) + C$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\arctan x + c$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\frac{1}{2} Ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + C$	$\frac{1}{1-x^2}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال:

$$I = \int \left(\frac{2}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{1}{2+2x^2} + \left(\frac{1}{2}\right)^x \right) dx$$

$$= 2\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) + \frac{1}{2}\arctan x + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} + c$$

مثال:

$$\int \left(3^x e^x + \cos 2x + \frac{4}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{4-4x^2} \right)$$

$$= 3e^x + \cos 2x + 4 \times \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{1-x^2}$$

$$\frac{3e^x}{\ln(3e)} + \frac{1}{2}\sin 2x + 4\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + \frac{1}{8}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c$$

مثال:

$$I = \int \tan^2 x\, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\, dx = \int \left(\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} \right) dx$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \tan x - x + c$$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z