المحاضرة السابعة
(نظري)

المحتوى العلمي للمحاضرة يتضمن مايلي:

- ❖ دراسة التكامل من النمط $I = \int f\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)dx$.
- ❖ العديد من الأمثلة المتعلقة بهذه التكاملات.

دراسة التكامل من النمط $I = \int f\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)dx$ حيث f تابع كسري
ومميز $a \neq 0$ ثلاثي الحدود $ax^2 + bx + c$ غير صفري

فكرة حلّ هذا التكامل هو استخدام تعويض يؤدي إلى تكامل لدالة كسرية

يُحلّ هذا التكامل باستخدام تعويضات(تحويلات) أولر وهي على الشكل التالي:

تعويض أولر الأول: إذا كان $a > 0$ عندئذٍ نفرض

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t + x\sqrt{a} \quad or \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = t - x\sqrt{a}$$

نربع الطرفين نحسب x ثم dx والجذر بدلالة t، نعوض في I فنحصل على تكامل كسري معروف.

تعويض أولر الثاني: إذا كان $c > 0$ عندئذٍ نفرض

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = tx + \sqrt{c} \quad or \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = tx - \sqrt{c}$$

نربع الطرفين نحسب x ثم dx والجذر بدلالة t، نعوض في I فنحصل على تكامل كسري معروف.

تعويض أولر الثالث: إذا كان $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ فإنّ لثلاثي الحدود $ax^2 + bx + c$ جذران حقيقيان مختلفان هما α و β $(\alpha \neq \beta)$ وعندئذٍ نفرض

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - \alpha)$$

أو

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - \beta)$$

نربع الطرفين ثم نحسب x و dx والجذر بدلالة t، نعوض في I فنحصل على تكامل كسري معروف.

ملاحظة: إذا كان $a < 0$ و $c < 0$ فلا يمكن استخدام تعويض أولر الأول والثاني بل نستخدم تعويض أولر الثالث ضمن الشرط $\Delta = b^2 - 4ac > 0$

ملاحظة: إذا كان $a < 0$ و $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ فتكون هذه الحالة مستثناة لأن المقدار تحت الجذر يجب أن يكون موجباً

ملاحظة: في بعض التمارين قد يكون استخدام أكثر من تعويض فنحصل على أجوبة متكافئة.

مثال: أنجز التكامل التالي

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$$

الحلّ: الطريقة الأولى: باستخدام تعويض أولر الأول: $a = 1 > 0$

نجري التحول $\sqrt{x^2 + x + 1} = t + x\sqrt{a} = t + x$

نربع الطرفين نجد $x^2 + x + 1 = (t + x)^2$ عندئذ

$$x^2 + x + 1 = t^2 + x^2 + 2tx \Rightarrow x = \frac{1 - t^2}{2t - 1}$$

عندئذ $dx = \frac{-2t^2 + 2t - 2}{(2t-1)^2} dt$ نعوض نجد:

$$I = \int \frac{-2}{2t - 1} dt = -ln|2t - 1| + c = -ln\left|2\sqrt{x^2 + x + 1} - 2x - 1\right| + c$$

طريقة ثانيه للحلّ: باستخدام تعويض أولر الثاني: $c = 1 > 0$، نضع

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = tx + \sqrt{c} = tx + 1$$

نربع الطرفين نجد: $x^2 + x + 1 = t^2x^2 + 2tx + 1$ بالتالي $x + 1 = t^2x + 2t$ عندئذ

$$x = \frac{1 - 2t}{t^2 - 1}$$

بالتالي

$$dx = \frac{2t^2 - 2t + 2}{(t^2-1)^2}dt$$

نعوض نجد

$$I = \int \frac{-2}{t^2-1}dt = 2\int \frac{dt}{1-t^2} = 2 \times \frac{1}{2} ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + c_1 = ln\left|\frac{1 + \frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}-1\right)}{x}}{1 - \frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}-1\right)}{x}}\right| + c_1$$

$$= ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+x+1}-1}{x-\sqrt{x^2+x+1}+1}\right| + c_1 = ln\left|\frac{x-1+\sqrt{x^2+x+1}}{x+1-\sqrt{x^2+x+1}}\right| + c_1$$

$$= ln\left|\frac{\left(x-1+\sqrt{x^2+x+1}\right)\left(x+1+\sqrt{x^2+x+1}\right)}{(x+1)^2-(x^2+x+1)}\right| + c_1$$

$$= ln\left|\frac{x^2-1+2x\sqrt{x^2+x+1}+x^2+x+1}{x}\right| + c_1$$

$$= ln\left|\frac{2x^2+x+2x\sqrt{x^2+x+1}}{x}\right| + c_1 = ln\left|2x+1+2\sqrt{x^2+x+1}\right| + c_1$$

$$= -ln\left|\frac{1}{2x+1+2\sqrt{x^2+x+1}}\right| + c_1 = -ln\left|\frac{2\sqrt{x^2+x+1}-2x-1}{3}\right| + c_1$$

$$= -ln\left|2\sqrt{x^2+x+1}-2x-1\right| + ln3 + c_1 == -ln\left|2\sqrt{x^2+x+1}-2x-1\right| + c$$

الطريقة الثالثة: بالاتمام إلى مربع كامل:

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}}$$

نضع $x + \frac{1}{2} = u$ بالتالي $dx = du$ نجد

$$I = \int \frac{du}{\sqrt{u^2+\frac{3}{4}}} = ln\left|u + \sqrt{u^2+\frac{3}{4}}\right| + c_1 = ln\left|x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x+1}\right| + c_1$$

$$= ln\left|\frac{2x+1+2\sqrt{x^2+x+1}}{2}\right| + c_1 = ln\left|2x+1+2\sqrt{x^2+x+1}\right| + c_2$$

$$= ln\left|\frac{\left(2\sqrt{x^2+x+1}\right)^2 - (2x+1)^2}{2\sqrt{x^2+x+1}-(2x+1)}\right| + c_2$$

$$= ln\left|\frac{3}{2\sqrt{x^2+x+1}-2x-1}\right| + c_2$$

$$= ln3 - ln\left|2\sqrt{x^2+x+1}-2x-1\right| + c_2$$

$$= -ln\left|2\sqrt{x^2+x+1}-2x-1\right| + c$$

مثال: أنجز التكامل

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+3x-2}}$$

الحلّ: باستخدام تعويض أولر الثالث: ثلاثي الحدود $-x^2+3x-2$ يملك جذران حقيقيان مختلفان $\alpha = 1, \beta = 2$

نفرض $\sqrt{-x^2+3x-2} = t(x-\alpha) = t(x-1)$

نربع الطرفين نجد $-(x-2)(x-1) = t^2(x-1)^2$ عندئذ $(2-x) = t^2(x-1)$

بالتالي

$$x = \frac{2+t^2}{1+t^2}$$

عندئذ $dx = \frac{-2t}{(1+t^2)^2}dt$ نعوض نجد:

$$\sqrt{-x^2+3x-2} = t(x-1) = \frac{t}{1+t^2}$$

بالتالي

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+3x-2}} = -2\int \frac{dt}{1+t^2} = -2arctan(t) + c = -2arctan\left(\sqrt{\frac{2-x}{x-1}}\right) + c$$

دراسة بعض الحالات الخاصة:

.1

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-b^2x^2}} = \frac{1}{b}arcsin\left(\frac{bx}{a}\right) + c \;\; or -\frac{1}{b}arccos\left(\frac{bx}{a}\right) + c$$

تم مناقشة هذه الحالة سابقاً

.2

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + c$$

تم مناقشة هذه الحالة سابقاً

.3

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + c$$

تم مناقشة هذه الحالة سابقاً

.4 لدراسة التكامل حيث $I = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ يمكننا أن نفرض

$$t = \frac{1}{2}(ax^2+bx+c)' = \frac{1}{2}\times(2ax+b)$$

مثال: أنجز التكامل

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

الحل: نضع $t = \frac{1}{2}\times(2ax+b) = \frac{1}{2}\times(2x+1)$

بالتالي $x = t - \frac{1}{2}$ عندئذ $dx = dt$ بالتالي

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+\frac{3}{4}}} = ln\left(t+\sqrt{t^2+\frac{3}{4}}\right) + c$$

$$= ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right) + c$$

مثال: أنجز التكامل التالي

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x-2}}$$

الحل: نضع

$$t=\frac{1}{2}\times(2x-1)=x-\frac{1}{2}$$

بالتالي $x=t+\frac{1}{2}$ عندئذ $dx=dt$ بالتالي

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-x-2}}=\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-\frac{9}{4}}}=ln\left|t+\sqrt{t^2-\frac{9}{4}}\right|+c=ln\left|x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x-2}\right|+c$$

طريقه ثانيه: باستخدام تعويض أولر الأول: $a=1>0$، عندئذٍ نفرض

$$\sqrt{x^2-x-2}=t+x$$

بالتالي $x=\frac{-2-t^2}{2t+1}$ بالتالي $dx=\frac{-2t^2-2t+4}{(2t+1)^2}dt$ بالتالي

$$\begin{aligned}
I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-x-2}}&=-\int\frac{2}{2t+1}dt=-ln|2t+1|+c_1\\
&=-ln\left|2\left(\sqrt{x^2-x-2}-x\right)+1\right|+c_1\\
&=-ln\left|-2x+1+2\sqrt{x^2-x-2}\right|+c_1\\
&=ln\left|\frac{1}{-2x+1+2\sqrt{x^2-x-2}}\right|+c_1\\
&=ln\left|\frac{2\sqrt{x^2-x-2}-(-2x+1)}{\left(2\sqrt{x^2-x-2}\right)^2-(-2x+1)^2}\right|+c_1\\
&=ln\left|\frac{2x-1+2\sqrt{x^2-x-2}}{-9}\right|+c_1=ln\left|\frac{2x-1+2\sqrt{x^2-x-2}}{9}\right|+c_1\\
&=ln\left|\frac{2}{9}\left(x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x-2}\right)\right|+c_1\\
&=ln\left(\frac{2}{9}\right)+ln\left|\left(x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x-2}\right)\right|+c_1\\
&=ln\left|x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x-2}\right|+c
\end{aligned}$$

5. دراسة التكامل من النمط $I=\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$، يمكننا أن نفرض

$$t=\frac{1}{2}(ax^2+bx+c)'=\frac{1}{2}\times(2ax+b)$$

مثال: أنجز التكامل التالي

$$I=\int\frac{x+3}{\sqrt{4x^2+4x+3}}$$

الحل: نضع $t=\frac{1}{2}\times(8x+4)=4x+2$

بالتالي $x=\frac{t-2}{4}$ عندئذ $dt=4dx$ بالتالي

$$\begin{aligned}
I=\int\frac{x+3}{\sqrt{4x^2+4x+3}}&=\frac{1}{8}\int\frac{t+10}{\sqrt{t^2+8}}=\frac{1}{8}\int\frac{t}{\sqrt{t^2+8}}dt+\frac{10}{8}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+8}}\\
&=\frac{1}{8}\sqrt{t^2+8}+\frac{5}{4}ln\left(t+\sqrt{t^2+8}\right)+c_1\\
&=\frac{1}{8}\sqrt{4x^2+4x+3}+\frac{5}{4}ln\left(2x+1+\sqrt{4x^2+4x+3}\right)+c
\end{aligned}$$
