6

المحاضرة السادسة
(نظري)

المحتوى العلمي للمحاضرة يتضمن مايلي:

- دراسة التكامل من النوع $I = \int R\left(x, x^{\frac{p_1}{q_1}}, x^{\frac{p_2}{q_2}}, \ldots, x^{\frac{p_n}{q_n}}\right) dx$
- دراسة التكامل من النوع $I = \int R\left(x, (ax+b)^{\frac{p_1}{q_1}}, (ax+b)^{\frac{p_2}{q_2}}, \ldots, (ax+b)^{\frac{p_n}{q_n}}\right) dx$
- دراسة التكامل من النوع $I = \int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{q_2}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_n}{q_n}}\right) dx$ حيث $ad - bc \neq 0$
- دراسة التكامل من النوع $I = \int x^m (a + bx^n)^k \, dx$ (ثنائي الحد التفاضلي)

دراسة التكامل من النوع $I=\int R\left(x,x^{\frac{p_1}{q_1}},x^{\frac{p_2}{q_2}},...,x^{\frac{p_n}{q_n}}\right)dx$

فكرة حلّ هذا التكامل هو استخدام تحويل يؤدي إلى تكامل لدالة كسرية

لنفرض أن المقام المشترك للكسور التالية: $\frac{p_1}{q_1},\frac{p_2}{q_2},\dots\dots,\frac{p_n}{q_n}$ هو α

عندئذٍ لحلّ التكامل I، نفرض أن $x=t^{\alpha}$ فيكون $dx=\alpha t^{\alpha-1}dt$، نبدل في التكامل I قيمة كل من x و dx بدلالة t فننتقل إلى تكامل لدالة كسرية.

مثال1: أنجز التكامل

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$$

الحلّ: نكتب التكامل I بالشكل:

$$I=\int\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}}$$

بالتالي نفرض أن $x=t^6$ فيكون $dx=6t^5dt$، نبدل في التكامل I نجد:

$$I=\int\frac{6t^5dt}{t^3+t^2}=6\int\frac{t^3dt}{t+1}dt=6\int\left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)dt$$
$$=2t^3-3t^2+6t-6\ln|t+1|+c$$
$$=2\left(\sqrt[6]{x}\right)^3-3\left(\sqrt[6]{x}\right)^2+6\left(\sqrt[6]{x}\right)-6\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right|+c$$

مثال2: أنجز التكامل

$$I=\int\frac{1+3x\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}\,dx$$

الحلّ: نكتب التكامل I بالشكل:

$$I=\int\frac{1+3xx^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}}}dx$$

بالتالي نفرض أن $x=t^4$ فيكون $dx=4t^3dt$ ، نبدل في التكامل I نجد:

$$I=\int\frac{4t^3+12t^9}{t}dt=\int(4t^2+12t^8)dt=\frac{4}{3}t^3+\frac{12}{9}t^9+c=\frac{4}{3}\left(\sqrt[4]{x}\right)^3+\frac{4}{3}\left(\sqrt[4]{x}\right)^9+c$$

دراسة التكامل من النوع $I=\int R\left(x,(ax+b)^{\frac{p_1}{q_1}},(ax+b)^{\frac{p_2}{q_2}},...,(ax+b)^{\frac{p_n}{q_n}}\right)dx$

لحلّ التكامل I، نفرض أن $ax+b=t^{\alpha}$ حيث α المقام المشترك للكسور التالية $\frac{p_1}{q_1},\frac{p_2}{q_2},\dots\dots,\frac{p_n}{q_n}$

فيكون $adx=\alpha t^{\alpha-1}dt$، نبدل في التكامل I قيمة كل من x و dx بدلالة t فيتحول I إلى تكامل لدالة كسرية.

مثال3: أنجز التكامل

$$I=\int\frac{\sqrt{2x-3}dx}{3\sqrt[3]{2x-3}+3}$$

الحلّ: نفرض أن $2x-3=t^6$ فيكون $2dx=6t^5dt$، نبدل في التكامل I نجد:

$$I=\int\frac{t^3\times3t^5dt}{3t^2+3}=\int\frac{t^8dt}{1+t^2}=\int\left(t^6-t^4+t^2-1+\frac{1}{1+t^2}\right)dt=\frac{t^7}{7}-\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}-t+\arctan t+c$$
$$=\frac{\left(\sqrt[6]{2x-3}\right)^7}{7}-\frac{\left(\sqrt[6]{2x-3}\right)^5}{5}+\frac{\left(\sqrt[6]{2x-3}\right)^3}{3}-\sqrt[6]{2x-3}+\arctan\left(\sqrt[6]{2x-3}\right)+c$$

دراسة التكامل من النوع $I = \int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{q_2}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_n}{q_n}}\right) dx$ حيث $ad - bc \neq 0$

لإنجاز التكامل I، نفرض أن $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right) = t^{\alpha}$ حيث α المقام المشترك للكسور التالية $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \ldots \ldots, \frac{p_n}{q_n}$ ، نُبدل في التكامل المعطى قيمة كل من x و dx بدلالة t فيتحول I إلى تكامل لدالة كسرية.

مثال4: أنجز التكامل

$$I = \int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\, dx$$

نفرض أنّ $\frac{x-1}{x+1} = t^2$ فيكون $x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$ بالتالي $dx = \frac{4t}{(1-t^2)^2} dt$ بالتالي

$$I = \int \frac{4t^2}{(1-t^2)^2} dt = \int \frac{4t^2}{(1-t)^2(1+t)^2} dt$$

$$\frac{4t^2}{(1-t)^2(1+t)^2} = \frac{\mathrm{A}}{(1-t)^2} + \frac{\mathrm{B}}{(1-t)} + \frac{\mathrm{C}}{(1+t)^2} + \frac{\mathrm{D}}{(1+t)}$$

بسهولة نجد أنّ $\mathrm{A} = 1, B = -1, C = 1, D = -1$، عندئذٍ

$$I = \int \left(\frac{1}{(1-t)^2} - \frac{1}{(1-t)} + \frac{1}{(1+t)^2} - \frac{1}{(1+t)}\right) dt$$

$$= \frac{1}{1-t} + ln|1-t| - \frac{1}{1+t} - ln|1+t| + c$$

$$= \frac{1}{1-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} + ln\left|1-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right| - \frac{1}{1+\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} - ln\left|1+\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right| + c$$

دراسة التكامل من النوع $I = \int x^m(a+bx^n)^k\, dx$ (ثنائي الحد التفاضلي)

لدراسة التكامل من النمط $I = \int x^m(a+bx^n)^k\, dx$ حيث $a, b \in \mathbb{R}$ و $m, n, k \in \mathbb{Q}$

نناقش الحالات التالية:

1. إذا كان k عدد صحيح موجب تماماً، عندئذٍ لإيجاد التكامل I، ننشر $(a+bx^n)^k$ حسب دستور الكرخي-نيوتن

$$(a+bx^n)^k = \binom{k}{0} a^k + \binom{k}{1} a^{k-1}(bx^n)^1 + \cdots + \binom{k}{k-1} a^1(bx^n)^{k-1} + \binom{k}{k}(bx^n)^k$$

2. إذا كان k عدد صحيح سالب تماماً، عندئذٍ نجري التحويل $x = t^{\beta}$ حيث β المقام المشترك للكسرين n, m.

3. إذا كان k ليس بعدد صحيح أي k عدد عادي و تحقق $\frac{m+1}{n}$ عدد صحيح، عندئذٍ نجري التحويل

$$a + bx^n = t^{\alpha}$$

حيث α مقام الكسر k.

4. إذا كان k ليس بعدد صحيح أي k عدد عادي و $\frac{m+1}{n}$ ليس بعدد صحيح وتحقق $\left(\frac{m+1}{n} + k\right)$ عدد صحيح، عندئذٍ نجري التحويل

$$a + bx^n = t^{\alpha} x^n$$

حيث α مقام الكسر k.

مثال5: أنجز التكامل

$$I=\int \sqrt[3]{x}\left(2+\sqrt{x}\right)^{4} dx$$

الحلّ:

$$I=\int x^{\frac{1}{3}}\left(2+x^{\frac{1}{2}}\right)^{4} dx \quad (\text{ثنائي الحد التفاضلي})$$

لدينا $m=\frac{1}{3}$ و $n=\frac{1}{2}$ و $k=4$ عدد صحيح موجب تماماً

نطبق دستور الكرخي– نيوتن نجد:

$$\left(2+\sqrt{x}\right)^{4}=\binom{4}{0}2^{4}+\binom{4}{1}2^{3}\left(\sqrt{x}\right)^{1}+\binom{4}{2}2^{2}\left(\sqrt{x}\right)^{2}+\binom{4}{3}2^{1}\left(\sqrt{x}\right)^{3}+\binom{4}{4}\left(\sqrt{x}\right)^{4}$$

$$=16+32\sqrt{x}+24x+8x^{\frac{3}{2}}+x^{2}$$

$$I=\int x^{\frac{1}{3}}\left(16+32\sqrt{x}+24x+8x^{\frac{3}{2}}+x^{2}\right)dx$$

$$=12x^{\frac{4}{3}}+\frac{192}{11}x^{\frac{11}{6}}+\frac{72}{7}x^{\frac{7}{3}}+\frac{48}{17}x^{\frac{17}{6}}+\frac{3}{10}x^{\frac{10}{3}}+c$$

مثال6: أنجز التكامل

$$I=\int \sqrt{x}(1+2x^{3})^{-2} dx$$

الحلّ:

$$I=\int x^{\frac{1}{2}}(1+2x^{3})^{-2} dx \quad (\text{ثنائي الحد التفاضلي})$$

لدينا $m=\frac{1}{2}$ و $n=3$ و $k=-2<0$ عدد صحيح سالب تماماً

نفرض

$x=t^{\beta}$ حيث $\beta=2$ المقام المشترك للكسرين $\frac{1}{2}$ و $\frac{3}{1}$ بالتالي $x=t^{2}$ عندئذ $dx=2tdt$

$$I=\int t(1+2t^{6})^{-2}\,2tdt=\int \frac{2t^{2}}{(1+2t^{6})^{2}}dt=\int \frac{2t^{2}}{\left(\left(\sqrt{2}t^{3}\right)^{2}+1\right)^{2}}dt$$

نفرض $\sqrt{2}t^{3}=m$ بالتالي $dm=3\sqrt{2}t^{2}dt$ بالتالي

$$I=\frac{\sqrt{2}}{3}\int \frac{dm}{(m^{2}+1)^{2}}$$

نطبق الدستور التدريجي نجد:

$$I=\frac{\sqrt{2}}{3}\int \frac{dm}{(m^{2}+1)^{2}}=\frac{\sqrt{2}}{3}\times\frac{1}{2\times1\times1}\left[\frac{m}{(m^{2}+1)^{1}}+arctan(m)+c_{1}\right]$$

$$=\frac{m}{3\sqrt{2}(m^{2}+1)}+\frac{1}{3\sqrt{2}}arctan(m)+c$$

$$=\frac{\sqrt{2}t^{3}}{3\sqrt{2}\left(\left(\sqrt{2}t^{3}\right)^{2}+1\right)}+\frac{1}{3\sqrt{2}}arctan\left(\sqrt{2}t^{3}\right)+c$$

$$=\frac{\sqrt{2}t^{3}}{3\sqrt{2}(2t^{6}+1)}+\frac{1}{3\sqrt{2}}arctan\left(\sqrt{2}t^{3}\right)+c$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x}\right)^{3}}{3\left(2\left(\sqrt{x}\right)^{6}+1\right)}+\frac{1}{3\sqrt{2}}arctan\left(\sqrt{2}\left(\sqrt{x}\right)^{3}\right)+c$$

مثال7: أنجز التكامل التالي

$$I=\int x\left(1+x^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}dx$$

الحلّ: لدينا $m=1$ و $n=\frac{2}{3}$ و $k=-\frac{1}{2}$ ليس بعدد صحيح ولكنه عدد عادي

لدينا $\frac{m+1}{n}=3$ عدد صحيح، لذلك نجري التحويل

$$1+x^{\frac{2}{3}}=t^2$$

عندئذ

$$x=(t^2-1)^{\frac{3}{2}}$$
$$dx=3t(t^2-1)^{\frac{1}{2}}dt$$

نعوض في التكامل المعطى نجد:

$$I=3\int\left(t^2-1\right)^2dt=3\int\left(t^4-2t^2+1\right)dt=\frac{3t^5}{5}-2t^3+3t+c$$
$$=\frac{3}{5}\left(\sqrt{1+x^{\frac{2}{3}}}\right)^5-2\left(\sqrt{1+x^{\frac{2}{3}}}\right)^3+3\left(\sqrt{1+x^{\frac{2}{3}}}\right)+c$$

مثال8: أنجز التكامل التالي

$$I=\int x^5(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}dx$$

الحلّ: لدينا $m=5$ و $n=2$ و $k=-\frac{1}{2}$ ليس بعدد صحيح

لدينا $\frac{m+1}{n}=3$ عدد صحيح، لذلك نجري التحويل

$$1+x^2=t^2$$

عندئذ

$$xdx=tdt$$

نعوض في التكامل المعطى نجد:

$$I=\int(t^2-1)^2t^{-1}tdt=\int(t^2-1)^2dt=\int(t^4-2t^2+1)dt=\frac{t^5}{5}-\frac{2}{3}t^3+t+c$$
$$=\frac{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^5}{5}-\frac{2}{3}\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3+\left(\sqrt{1+x^2}\right)+c$$

مثال9: أنجز التكامل

$$I=\int x^{-11}(1+x^4)^{-\frac{1}{2}}dx$$

الحلّ: لدينا $m=-11$ و $n=4$ و $k=-\frac{1}{2}$ ليس بعدد صحيح ولكنه عدد عادي

لدينا $\frac{m+1}{n}=-\frac{5}{2}$ عدد غير صحيح.

لدينا $\frac{m+1}{n}+k=-3$ عدد صحيح، لذلك نجري التحويل

$$1+x^4=x^4t^2$$

عندئذ $x=\frac{1}{(t^2-1)^{\frac{1}{4}}}$ بالتالي

$$dx=-\frac{t}{2(t^2-1)^{\frac{5}{4}}}dt$$

نعوض في التكامل المعطى نجد:

$$I=-\frac{1}{2}\int\left(t^2-1\right)^2dt=-\frac{t^5}{10}+\frac{t^3}{3}-\frac{t}{2}+c$$

$$=-\frac{1}{10}\left(\sqrt{\frac{1+x^4}{x^4}}\right)^5+\frac{1}{3}\left(\sqrt{\frac{1+x^4}{x^4}}\right)^3-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x^4}{x^4}}+c$$

مثال10: أنجز التكامل

$$I=\int x^{-2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}dx$$

الحلّ: لدينا $m=-2$ و $n=2$ و $k=-\frac{3}{2}$ ليس بعدد صحيح ولكنه عدد عادي

لدينا $\frac{m+1}{n}=-\frac{1}{2}$ عدد غير صحيح.

لدينا $\frac{m+1}{n}+k=-2$ عدد صحيح، لذلك نجري التحويل

$$1+x^2=x^2t^2$$

عندئذ $x=(t^2-1)^{-\frac{1}{2}}$ بالتالي

$$dx=-\frac{t}{(t^2-1)^{\frac{3}{2}}}dt$$

نعوض في التكامل المعطى نجد:

$$I=-\int\left(\frac{t^2-1}{t^2}\right)dt=\int\left(-1+\frac{1}{t^2}\right)dt=-t-\frac{1}{t}+c=-\sqrt{x^{-2}+1}-\frac{1}{\sqrt{x^{-2}+1}}+c$$

$$=-\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}-\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}+c$$
