المحاضرة الخامسة
(نظري)

المحتوى العلمي للمحاضرة يتضمن مايلي:

- **دراسة أنماط من التكاملات الكسرية.**
- **العديد من الأمثلة المتعلقة بهذه التكاملات.**

دراسة التكامل من الشكل $I = \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$

❖ لتكن $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ دالة كسرية حيث $P(x)$ و $Q(x)$ كثيرتي حدود، عندئذ إذا كانت درجة كثيرة الحدود في البسط أكبر أو تساوي درجة كثيرة الحدود في المقام فإننا نقسم البسط على المقام أي نجري القسمة الإقليدية لنجد:

$$P(x) = H(x) \times Q(x) + S(x)$$

حيث

- $H(x)$ يمثل ناتج القسمة وهو كثير حدود
- $S(x)$ (باقي القسمة) وهو كثير حدود درجته أصغر تماماً من درجة $Q(x)$(المقسوم عليه)

بالتالي

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = H(x) + \frac{S(x)}{Q(x)}$$

عندئذ

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int H(x)dx + \int \frac{S(x)}{Q(x)} dx$$

$\int H(x)dx$ يُنجز بسهولة

التكامل $\int \frac{S(x)}{Q(x)} dx$ إما أن يُنجز بسهولة أو يتطلب تفريق (تحليل) $\frac{S(x)}{Q(x)}$ إلى مجموع كسور جزئية بسيطه

مثال1: أنجز التكامل التالي

$$I = \int \frac{x^5}{x^2+1} dx$$

الحلّ:

نلاحظ بأنّ درجة كثيرة الحدود في البسط أكبر تماماً من درجة كثيرة الحدود في المقام لذلك نجري القسمة الإقليدية:

$$x^5 = (x^3 - x)(x^2+1) + x$$

بالتالي:

$$\frac{x^5}{x^2+1} = x^3 - x + \frac{x}{x^2+1}$$

$$I = \int \left(x^3 - x + \frac{x}{x^2+1}\right) dx = \int (x^3 - x)dx + \int \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c$$

تفريق الكسور:

لتكن $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ دالة كسرية حيث $P(x)$ و $Q(x)$ كثيرتي حدود، و درجة كثيرة الحدود في البسط أصغر تماماً من درجة كثيرة الحدود في المقام، بالتالي يمكن كتابة الدالة الكسرية $R(x)$ على شكل مجموع منته من الدوال الكسرية البسيطة و بالتالي فإن $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ يؤول إلى إيجاد تكاملات لكسور بسيطة.

نميز الحالات الآتية:

الحالة الأولى: لتكن $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ دالة كسرية حيث $P(x)$ و $Q(x)$ كثيرتي حدود، و درجة كثيرة الحدود في البسط أصغر تماماً من درجة كثيرة الحدود في المقام عندئذ إذا كانت:

$Q(x)$ تتحلل إلى جداء عوامل جميعها من الدرجة الأولى و غير مكررة.

أي: $Q(x)=(x-a_1)(x-a_2)\dots\dots(x-a_n)$

عندئذٍ

$$\frac{P(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\dots\dots(x-a_n)}=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\dots+\frac{A_n}{x-a_n}$$

حيث A_1،A_2، … ،A_n ثوابت عددية تُعيّن بطريقتين:

إما بتوحيد المقامات ثم نضرب بالمقام المشترك ثم المطابقة بين طرفي المساواة

أو نتبع الطريقة الآتية: لتعيين A_k نضرب الطرفين بالمقدار $(x-a_k)$ ثم نعوض $x=a_k$ في العلاقة الناتجة.

مثال2: أنجز التكامل التالي

$$\int\frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)(2-x)}dx$$

الحل: نلاحظ بأنّ درجة كثيرة الحدود في البسط أصغر تماماً من درجة كثيرة الحدود في المقام، بالتالي نفرق الكسر إلى مجموع كسور جزئية بالشكل التالي

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)(2-x)}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{x+1}+\frac{A_3}{2-x}\dots.(*)$$

- لتعيين A_1 : نضرب طرفي العلاقة $(*)$ بـ $(x-1)$ نجد

$$\frac{x^2+1}{(x+1)(2-x)}=A_1+\frac{A_2(x-1)}{x+1}+\frac{A_3(x-1)}{2-x}$$

نعوض $x=1$ في العلاقة الناتجة نجد:

$$\frac{1^2+1}{(1+1)(2-1)}=A_1+0+0\Longrightarrow A_1=1$$

- لتعيين A_2 : نضرب طرفي العلاقة $(*)$ بـ $(x+1)$ ثم نعوض $x=-1$ في العلاقة الناتجة

نجد: $A_2=-\frac{1}{3}$

- لتعيين A_3 : نضرب طرفي العلاقة $(*)$ بـ $(2-x)$ ثم نعوض $x=2$ في العلاقة الناتجة

نجد: $A_3=\frac{5}{3}$

ومنه:

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)(2-x)}=\frac{1}{x-1}-\frac{\frac{1}{3}}{x+1}+\frac{\frac{5}{3}}{2-x}$$

وبالتالي:

$$\int\frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)(2-x)}dx=\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{5}{3}\int\frac{dx}{2-x}$$

$$=\ ln|x-1|-\frac{1}{3}\ ln|x+1|-\frac{5}{3}\ ln|2-x|+c$$

مثال3: أنجز التكامل التالي

$$\int\frac{7x-5}{x^3+x^2-6x}dx$$

الحلّ: لدينا $x^3+x^2-6x=x(x^2+x-6)=x(x-2)(x+3)$

$$\frac{7x-5}{x^3+x^2-6x}=\frac{7x-5}{x(x-2)(x+3)}$$

$$\frac{7x-5}{x(x-2)(x+3)}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x-2}+\frac{A_3}{x+3}\dots(*)$$

- لتعيين A_1: نضرب طرفي العلاقة $(*)$ بـ x نجد

$$\frac{7x-5}{(x-2)(x+3)}=A_1+\frac{xA_2}{x-2}+\frac{xA_3}{x+3}$$

و نجعل $x=0$ في العلاقة الناتجة نجد:

$$\frac{7(0)-5}{(0-2)(0+3)}=A_1+0+0\Longrightarrow A_1=\frac{5}{6}$$

- لتعيين A_2 : نضرب طرفي العلاقة $(*)$ بـ $(x-2)$ و نجعل $x=2$ في العلاقة الناتجة نجد: $A_2=\frac{9}{10}$
- لتعيين A_3 : نضرب طرفي العلاقة $(*)$ بـ $(x+3)$ و نجعل $x=-3$ في العلاقة الناتجة نجد $A_3=-\frac{26}{15}$ و منه:

$$\frac{7x-5}{x^3+x^2-6x}=\frac{7x-5}{x(x-2)(x+3)}=\frac{\frac{5}{6}}{x}+\frac{\frac{9}{10}}{x-2}-\frac{\frac{26}{15}}{x+3}$$

و بالتالي:

$$\int\frac{7x-5}{x^3+x^2-6x}dx=\frac{5}{6}\int\frac{dx}{x}+\frac{9}{10}\int\frac{dx}{x-2}-\frac{26}{15}\int\frac{dx}{x+3}$$

$$\int\frac{7x-5}{x^3+x^2-6x}dx=\frac{5}{6}\ ln|x|+\frac{9}{10}\ ln|x-2|-\frac{26}{15}\ ln|x+3|+c$$

الحالة الثانية: لتكن $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ دالة كسرية حيث $P(x)$ و $Q(x)$ كثيرتي حدود، و درجة كثيرة الحدود في البسط أصغر تماماً من درجة كثيرة الحدود في المقام عندئذ إذا كانت:

$Q(x)$ تتحلل بالشكل $Q(x)=(x-a)^k$ أي $(x-a)$ مكرر k مره حيث k عدد طبيعي، عندئذٍ

$$\frac{P(x)}{(x-a)^k}=\frac{A_1}{(x-a)^k}+\frac{A_2}{(x-a)^{k-1}}+\frac{A_3}{(x-a)^{k-2}}+\dots+\frac{A_k}{(x-a)^1}$$

حيث $A_1,A_2,A_3,\dots,A_k$ ثوابت عددية يجب تعيينها.

مثال4: أنجز التكامل التالي

$$\int\frac{x^2}{(x+1)^3}dx$$

الحل:

$$\frac{x^2}{(x+1)^3}=\frac{A_1}{(x+1)^3}+\frac{A_2}{(x+1)^2}+\frac{A_3}{(x+1)}\dots(*)$$

- لتعيين A_1 : نضرب $(*)$ بـ $(x+1)^3$

$$x^2=A_1+A_2(x+1)+A_3(x+1)^2$$

ثم نعوض $x=-1$ في العلاقة الناتجة نجد:

$$A_1=1$$

- نضرب طرفي العلاقة $(*)$ بـ x ثم نجعل $x\longrightarrow+\infty$ نجد

$$A_3=1$$

- نعوض $x=0$ في طرفي العلاقة $(*)$ نجد

$$0=A_1+A_2+A_3$$

بالتالي $A_2=-2$

$$\int \frac{x^2}{(x+1)^3}dx = \int \left(\frac{1}{(x+1)^3} - \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)}\right)dx$$
$$= -\frac{1}{2(x+1)^2} + \frac{2}{(x+1)} + ln|x+1| + c$$

مثال5: أنجز التكامل التالي

$$I = \int \frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}dx$$

الحلّ: لدينا

$$x^4-3x^3+3x^2-x = x(x^3-3x^2+3x-1) = x(x-1)^3$$

مقام الكسر $\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}$ فيه x من الدرجة الأولى و $(x-1)$ مكرر ثلاث مرات عندئذ

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)^3} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{(x-1)}$$

بتوحيد المقامات في الطرف الثاني ثم نضرب الطرفين بالمقام المشترك $x(x-1)^3$ نجد:

$$x^3+1 = A(x-1)^3 + Bx + Cx(x-1) + Dx(x-1)^2$$

بالإصلاح:

$$x^3+1 = (A+D)x^3 + (-3A+C-2D)x^2 + (3A+B-C+D)x - A$$

بالمطابقة بين الطرفين نجد:

$$\begin{cases} A+D=1 \\ -3A+C-2D=0 \\ 3A+B-C+D=0 \\ -A=1 \end{cases}$$

بحل هذه الجملة نجد $A=-1, B=2, C=1, D=2$ و منه:

$$\frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x} = -\frac{1}{x} + \frac{2}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-1}$$
$$\int \frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}dx = -\int \frac{dx}{x} + 2\int \frac{dx}{(x-1)^3} + \int \frac{dx}{(x-1)^2} + 2\int \frac{dx}{x-1}$$
$$\int \frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}dx = -ln|x| - \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} + 2\,ln|x-1| + c$$

الحالة الثالثة: لتكن $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ دالة كسرية حيث $P(x)$ و $Q(x)$ كثيرتي حدود، و درجة كثيرة الحدود في البسط أصغر تماماً من درجة كثيرة الحدود في المقام عندئذ إذا كانت:

$Q(x) = (ax^2+bx+c)^k$ حيث $k \geq 1$ عدد طبيعي و ثلاثي الحدود التربيعي ax^2+bx+c مميزه سالب

عندئذٍ الكسر $\frac{P(x)}{Q(x)}$ يتحلل بالشكل التالي:

$$\frac{P(x)}{(ax^2+bx+c)^k} = \frac{A_1x+B_1}{(ax^2+bx+c)^k} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^{k-1}} + \cdots + \frac{A_kx+B_k}{(ax^2+bx+c)^1}$$

لتعيين الثوابت العددية نضرب الطرفين بـ $(ax^2+bx+c)^k$ ثم نقوم بعملية المطابقة.

كما توجد طرق أخرى لإيجاد الثوابت نوضحها من خلال بعض الأمثلة.

ملاحظة عامه: لتكن $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ دالة كسرية حيث $P(x)$ و $Q(x)$ كثيرتي حدود، و درجة كثيرة الحدود في البسط أصغر تماماً من درجة كثيرة الحدود في المقام عندئذ إذا كانت:

$$Q(x) = (x-\alpha)^m(ax^2+bx+c)^r$$

علماً أنّ ax^2+bx+c كثير حدود تربيعي مميزه سالب عندئذ

$$\frac{P(x)}{(x-\alpha)^m(ax^2+bx+c)^r} = \frac{A_1}{(x-\alpha)^m} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^{m-1}} + \cdots + \frac{A_m}{(x-\alpha)} + \frac{B_1x+C_1}{(ax^2+bx+c)^r} + \frac{B_2x+C_2}{(ax^2+bx+c)^{r-1}} + \cdots + \frac{B_rx+C_r}{(ax^2+bx+c)}$$

مثال6: أنجز التكامل التالي

$$I=\int\frac{x^2+2x+1}{(x-1)^2(x^2+1)}dx$$

الحلّ:

$$\frac{x^2+2x+1}{(x-1)^2(x^2+1)}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{(x-1)}+\frac{Cx+D}{x^2+1}\dots(*)$$

- نضرب طرفي العلاقة $(*)$ بـ $(x-1)^2$ ثم نجعل $x=1$ نجد $A=2$
- نضرب طرفي العلاقة $(*)$ بـ x ثم نجعل $x\longrightarrow\infty$ بالتالي

$$0=B+C\dots(1)$$

- نعوض $x=0$ في طرفي العلاقة $(*)$ نجد

$$-1=D-B\dots(2)$$

- نعوض $x=-1$ في طرفي العلاقة$(*)$ نجد

$$0=-B-C+D+1\dots(3)$$

من (1) نجد $C=-B$ ومن (2) نجد $D=B-1$

نعوض في (3) نجد:$B=0$ عندئذ $C=0$ و$D=-1$

$$\frac{x^2+2x+1}{(x-1)^2(x^2+1)}=\frac{2}{(x-1)^2}-\frac{1}{x^2+1}$$

$$I=\int\left(\frac{2}{(x-1)^2}-\frac{1}{x^2+1}\right)dx=-\frac{2}{x-1}-arctan(x)+c$$

مثال7: أنجز التكامل التالي

$$\int\frac{7x^2+26x-9}{x^4+4x^3+4x^2-9}dx$$

الحلّ:

$$x^4+4x^3+4x^2-9=x^2(x^2+4x+4)-9=x^2(x+2)^2-(3)^2$$
$$x^4+4x^3+4x^2-9=(x^2+2x)^2-(3)^2=(x^2+2x+3)(x^2+2x-3)$$
$$x^4+4x^3+4x^2-9=(x^2+2x+3)(x^2+2x-3)$$
$$=(x^2+2x+3)(x-1)(x+3)$$
$$\frac{7x^2+26x-9}{x^4+4x^3+4x^2-9}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+3}$$

نضرب الطرفين بـ $x^4+4x^3+4x^2-9=(x^2+2x+3)(x-1)(x+3)$

وبعد الإصلاح نحصل على:

$$\boldsymbol{7x^2+26x-9=(A+B+C)x^3+(5A+B+2C+D)x^2+(9A+B-3C+2D)x+(9A-3D-3B)}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases}A+B+C=0\\5A+B+2C+D=7\\9A+B-3C+2D=26\\9A-3D-3B=-9\end{cases}$$

بحل هذه الجملة نجد أن

$$A=1,B=1,C=-2,D=5$$

$$\int \frac{7x^2+26x-9}{x^4+4x^3+4x^2-9}dx = \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{x+3} + \int \frac{-2x+5}{x^2+2x+3}\,dx$$
$$= \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{x+3} - \int \frac{2x+2-7}{x^2+2x+3}\,dx$$
$$= \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{x+3} - \int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}\,dx + \int \frac{7}{(x+1)^2+2}\,dx$$
$$= ln|x-1| + ln|x+3| - ln|x^2+2x+3| + \frac{7}{\sqrt{2}} arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + c$$

مثال8: أنجز التكامل التالي

$$I = \int \frac{x^2+x+5}{(1+x)(x^2+4)}dx$$

الحلّ:

$$\frac{x^2+x+5}{(1+x)(x^2+4)} = \frac{A}{(1+x)} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$$

نلاحظ بأنّ $A=1$ و $B=0$ و $C=1$

$$I = \int \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{x^2+4}\right)dx = \ln|1+x| + \frac{1}{2}arctan\left(\frac{x}{2}\right) + c$$

❖ **نقدم الآن العديد من الأمثلة من أجل ترسيخ المفاهيم السابقة**

مثال9: أنجز التكامل التالي

$$I = \int \frac{x^4+1}{x^3+x^2+x+1}dx$$

الحلّ: باجراء القسمة الإقليدية نجد

$$x^4+1 = (x-1)(x^3+x^2+x+1)+2$$

$$\frac{x^4+1}{x^3+x^2+x+1} = x-1+\frac{2}{x^3+x^2+x+1}$$
$$I = \int \left(x-1+\frac{2}{x^3+x^2+x+1}\right)dx = \int \left(x-1+\frac{2}{(x+1)(x^2+1)}\right)dx$$
$$I = \int (x-1)\,dx + \int \frac{2}{(x+1)(x^2+1)}dx = I_1 + I_2$$

حيث $I_1 = \int (x-1)\,dx$ و $I_2 = \int \frac{2}{(x+1)(x^2+1)}dx$

- $I_1 = \int (x-1)\,dx = \frac{x^2}{2} - x + c_1$
- لإيجاد التكامل $I_2 = \int \frac{2}{(x+1)(x^2+1)}dx$ نبحث عن الثوابت A, B, C

$$\frac{2}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \dots (*)$$

إيجاد A

نضرب طرفي العلاقة $(*)$ بـ $(x+1)$ ثم نضع $x=-1$ نجد $A=1$

إيجاد B

نضرب طرفي العلاقة $(*)$ بـ x ونجعل $x \longrightarrow \infty$ نجد: $A+B=0$ بالتالي $B=-1$

إيجاد C

نعوض $x=0$ في $(*)$ نجد $A+C=2$ بالتالي $C=1$

نلاحظ مما سبق بأنّ $A=1$ و $B=-1$ و $C=1$

$$I_2=\int\frac{2}{(x+1)(x^2+1)}dx=\int\left(\frac{1}{x+1}+\frac{-x+1}{x^2+1}\right)dx$$
$$=\int\left(\frac{1}{x+1}+\frac{-x}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}\right)dx$$
$$=\ln(|x+1|)-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+arc\ tanx+c_2$$

عندئذ

$$I=\frac{x^2}{2}-x+\ln(|x+1|)-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+arc\ tanx+c$$

مثال10: أنجز التكامل التالي

$$I=\int\frac{x^5+x^3+2x^2+1}{x^3+x}dx$$

الحلّ: باجراء القسمة الإقليدية نجد $x^5+x^3+2x^2+1=x^2(x^3+x)+(2x^2+1)$

$$I=\int\left(x^2+\frac{2x^2+1}{x^3+x}\right)dx=\int\left(x^2+\frac{2x^2+1}{x(x^2+1)}\right)dx$$
$$\frac{2x^2+1}{x(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

نلاحظ بأنّ $A=1$ و $B=1$ و $C=0$

$$I=\int\left(x^2+\frac{1}{x}+\frac{x}{x^2+1}\right)dx=\frac{x^3}{3}+\ln|x|+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+c$$

مثال11: أنجز التكامل التالي

$$I=\int\frac{x}{x^4-16}dx$$

الحلّ: لدينا $\frac{x}{x^4-16}=\frac{x}{(x+2)(x-2)(x^2+4)}$ عندئذٍ

$$\frac{x}{(x+2)(x-2)(x^2+4)}=\frac{A}{(x+2)}+\frac{B}{(x-2)}+\frac{Cx+D}{x^2+4}\ ...(*)$$

- نضرب طرفي العلاقة $(*)$ بـ $(x+2)$ ثم نجعل $x=-2$ نجد $A=\frac{1}{16}$
- نضرب طرفي العلاقة $(*)$ بـ $(x-2)$ ثم نجعل $x=2$ نجد $B=\frac{1}{16}$
- نضرب طرفي العلاقة $(*)$ بـ x ثم نجعل $x\longrightarrow\infty$ بالتالي $0=A+B+C$ عندئذ $C=-\frac{2}{16}$
- نعوض $x=0$ في $(*)$ نجد $D=0$

بالتالي

$$I=\int\frac{x}{x^4-16}dx=\int\left(\frac{\frac{1}{16}}{(x+2)}+\frac{\frac{1}{16}}{(x-2)}-\frac{\frac{2}{16}x}{x^2+4}\right)dx$$
$$=\frac{1}{16}ln|x+2|+\frac{1}{16}ln|x-2|-\frac{1}{16}ln(x^2+4)+c$$
$$=\frac{1}{16}ln\left|\frac{(x+2)(x-2)}{x^2+4}\right|+c=\frac{1}{16}ln\left|\frac{x^2-4}{x^2+4}\right|+c$$