المحاضرة الرابعة (نظري)

المحتوى العلمي للمحاضرة يتضمن مايلي:

- **دراسة التكامل من النمط** $I_m = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^m}$
- **دراسة التكامل من النمط** $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$
- **دراسة التكامل من النمط** $\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c} dx$
- **دراسة التكامل من النمط** $\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^m}$
- **دراسة التكامل من النمط** $\int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^m} dx$

❖ **العديد من الأمثلة المتعلقة بهذه الأنماط من التكاملات.**

دراسة التكامل من النمط $I_m = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^m}$ حيث $m \geq 1$ عدد طبيعي

الحالة الأولى: $m = 1$ بالتالي

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

الحالة الثانية: $m \geq 2$ بالتالي

$$I_m = I_{n+1} = \frac{1}{2a^2n}\left[\frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + (2n-1)I_n\right]; n \geq 1$$

يدعى هذا القانون بالدستور التدريجي

مثال1: أنجز التكامل

$$\int \frac{dx}{(x^2+2)^2}$$

الحلّ: لنضع

$$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+2)^2}$$

نلاحظ بأنّ $a^2 = 2$ نجد

$$I_2 = I_{1+1} = \frac{1}{2\times 2\times 1}\left[\frac{x}{(x^2+2)^1} + (2\times 1 - 1)I_1\right]$$

$$I_2 = \frac{1}{4}\left[\frac{x}{x^2+2} + I_1\right]$$

لنوجد I_1:

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}} arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + c_1$$

نعوض بشكل تراجعي نجد

$$I_2 = \frac{x}{4(x^2+2)} + \frac{1}{4\sqrt{2}} arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + c$$

مثال2: أنجز التكامل

$$I_3 = \int \frac{dx}{(x^2+4)^3}$$

الحلّ: نلاحظ بأنّ $a^2 = 4$ نجد

$$I_3 = I_{2+1} = \frac{1}{2\times 4\times 2}\left[\frac{x}{(x^2+4)^2} + (2\times 2 - 1)I_2\right]$$

$$I_3 = \frac{x}{16(x^2+4)^2} + \frac{3}{16} I_2$$

لنوجد I_2:

$$I_2 = I_{1+1} = \frac{1}{2\times 4\times 1}\left[\frac{x}{(x^2+4)^1} + (2\times 1 - 1)I_1\right]$$

$$I_2 = \frac{x}{8(x^2+4)} + \frac{1}{8} I_1$$

لنوجد I_1:

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{2} arctan\left(\frac{x}{2}\right) + c_1$$

نعوض بشكل تراجعي نجد

$$I_2 = \frac{x}{8(x^2+4)} + \frac{1}{16} arctan\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{8} c_1$$

عندئذ

$$I_3=\frac{x}{16(x^2+4)^2}+\frac{3}{16}\left(\frac{x}{8(x^2+4)}+\frac{1}{16}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{8}c_1\right)$$
$$I_3=\frac{x}{16(x^2+4)^2}+\frac{3x}{128(x^2+4)}+\frac{3}{256}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+c$$

دراسة التكامل من النمط $I=\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$

لدراسة هذا التكامل نميز الحالات التالية بالاعتماد على مميز ثلاثي الحدود ax^2+bx+c

الحالة الأولى: $\Delta=b^2-4ac>0$ عندئذ لثلاثي الحدود ax^2+bx+c جذران مختلفان هما α و β حيث

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\quad ,\beta=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

عندئذ

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$$
$$I=\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{(x-\alpha)(x-\beta)}$$

نحلل الكسر $\frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)}$ إلى مجموع كسرين بالشكل:

$$\frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)}=\frac{A}{x-\alpha}+\frac{B}{x-\beta}$$
$$\boldsymbol{I}=\frac{1}{a}\int\left(\frac{A}{x-\alpha}+\frac{B}{x-\beta}\right)dx=\frac{A}{a}\ln|x-\alpha|+\frac{B}{a}\ln|x-\beta|+c$$

الحالة الثانية: $\Delta=0$ عندئذ لثلاثي الحدود ax^2+bx+c جذر مضاعف هو $\alpha=\frac{-b}{2a}$

عندئذ

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2$$
$$I=\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{(x-\alpha)^2}=-\frac{1}{a}\times\frac{1}{(x-\alpha)}+c$$

الحالة الثالثة: $\Delta<0$ عندئذ ثلاثي الحدود ax^2+bx+c لا يملك جذور حقيقية عندئذ نتمم إلى مربع كامل نجد

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)$$
$$=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right)$$

نضع $r^2=-\frac{\Delta}{4a^2}$ بالتالي

$$ax^2+bx+c=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+r^2\right)$$
$$I=\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+r^2}=\frac{1}{ra}\arctan\left(\frac{x+\frac{b}{2a}}{r}\right)+c$$
$$I=\frac{1}{ra}\arctan\left(\frac{2ax+b}{2ar}\right)+c$$

مثال3: أنجز التكامل

$$I=\int\frac{dx}{2x^2+9x-5}$$

الحلّ: نلاحظ بأنّ $a=2,b=9,c=-5$

$$\Delta= b^2-4ac=121>0$$
$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1}{2}\ ,\beta=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=-5$$

عندئذ

$$2x^2+9x-5=2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+5)$$
$$I=\int\frac{dx}{2x^2+9x-5}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+5)}$$

نحلل الكسر $\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+5)}$ إلى مجموع كسرين بالشكل:

$$\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+5)}=\frac{A}{x-\frac{1}{2}}+\frac{B}{x+5}\ \ldots..(*)$$

- إيجاد A: نضرب $(*)$ بـ $\left(x-\frac{1}{2}\right)$ ثم نعوض في العلاقة الناتجه $x=\frac{1}{2}$ بالتالي نجد

$$A=\frac{2}{11}$$

- إيجاد B: نضرب $(*)$ بـ $(x+5)$ ثم نعوض في العلاقة الناتجه $x=-5$ بالتالي نجد

$$B=-\frac{2}{11}$$

$$\boldsymbol{I}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{\frac{2}{11}}{x-\frac{1}{2}}-\frac{\frac{2}{11}}{x+5}\right)dx=\frac{1}{11}ln\left|x-\frac{1}{2}\right|-\frac{1}{11}ln|x+5|+c=\frac{1}{11}ln\left|\frac{x-\frac{1}{2}}{x+5}\right|+c$$

مثال4: أنجز التكامل

$$I=\int\frac{dx}{x^2-6x+9}$$

الحلّ: نلاحظ بأنّ $a=1,b=-6,c=9$

$$\Delta= 0$$
$$\alpha=\frac{-b}{2a}=3$$

عندئذ

$$x^2-6x+9=(x-3)^2$$
$$I=\int\frac{dx}{x^2-6x+9}=\int\frac{dx}{(x-3)^2}=-\frac{1}{(x-3)}+c$$

مثال5: أنجز التكامل

$$I=\int\frac{dx}{2x^2-12x+27}$$

الحلّ: نلاحظ بأنّ $a=2,b=-12,c=27$

$$\Delta= -72<0$$
$$2x^2-12x+27=2\left(x^2-6x+\frac{27}{2}\right)=2\left(x^2-6x+9-9+\frac{27}{2}\right)=2\left((x-3)^2+\frac{9}{2}\right)$$
$$I=\int\frac{dx}{2x^2-12x+27}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x-3)^2+\frac{9}{2}}$$
$$I=\int\frac{dx}{2x^2-12x+27}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x-3)^2+\frac{9}{2}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x-3)^2+\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2}$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{3}arctan\left(\frac{\sqrt{2}(x-3)}{3}\right)+c=\frac{1}{3\sqrt{2}}arctan\left(\frac{\sqrt{2}(x-3)}{3}\right)+c$$

دراسة التكامل من النمط $I = \int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c} dx$

لدراسة التكامل من النمط dx $I = \int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}$ نكتبه بالشكل:

$$\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c} dx = \int \frac{A(2ax+b)}{ax^2+bx+c} dx + \int \frac{B}{ax^2+bx+c} dx$$

حيث A و B ثوابت يُطلب تعيينها

نشتق الطرفين ثم نضرب بـ ax^2+bx+c نجد

$$Mx + N = A(2ax+b) + B$$

بالمطابقة نحصل على الثابتين A و B بالتالي

$$I = A ln|ax^2+bx+c| + BI_1$$

حيث $I_1 = \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ و هذا التكامل تم مناقشته سابقاً

مثال6: أنجز التكامل

$$I = \int \frac{2x+1}{x^2-3x+2} dx$$

الحلّ: نكتب I بالشكل:

$$\int \frac{2x+1}{x^2-3x+2} dx = \int \frac{A(2x-3)}{x^2-3x+2} dx + \int \frac{B}{x^2-3x+2} dx$$

نشتق الطرفين ثم نضرب بـ x^2-3x+2 نجد

$$2x + 1 = A(2x-3) + B$$

بالمطابقة نجد $A = 1$ و $B = 4$ بالتالي

$$I = ln|x^2-3x+2| + I_1$$

حيث

$$I_1 = \int \frac{4dx}{x^2-3x+2}$$

لنوجد I_1

لنحلل الكسر التالي

$$\frac{4}{x^2-3x+2} = \frac{4}{(x-2)(x-1)}$$

إلى مجموع كسريين بالشكل:

$$\frac{4}{(x-2)(x-1)} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-1)} \quad \ldots\ldots(*)$$

- إيجاد A: نضرب $(*)$ بـ $(x-2)$ ثم نعوض في العلاقة الناتجة $x = 2$ بالتالي نجد
  $A = 4$
- إيجاد B: نضرب $(*)$ بـ $(x-1)$ ثم نعوض في العلاقة الناتجة $x = 1$ بالتالي نجد
  $B = -4$

$$I_1 = 4ln|x-2| - 4ln|x-1| + c_1 = 4ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + c_1$$

بالتالي

$$I = ln|x^2-3x+2| + 4ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + c$$

دراسة التكامل من النمط $\mathbf{I = \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^m}}$

لدراسة هذا التكامل نميز الحالات التالية بالاعتماد على مميز ثلاثي الحدود $ax^2 + bx + c$

الحالة الأولى: $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ عندئذ لثلاثي الحدود $ax^2 + bx + c$ جذران مختلفان هما α و β حيث

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad , \beta = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

عندئذ

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

$$I = \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^m} = \frac{1}{a^m} \int \frac{dx}{(x - \alpha)^m (x - \beta)^m}$$

نحلل الكسر $\frac{1}{(x-\alpha)^m (x-\beta)^m}$ إلى مجموع كسور جزئية بالشكل:

$$\frac{1}{(x - \alpha)^m (x - \beta)^m} = \frac{A_1}{(x - \alpha)^m} + \frac{A_2}{(x - \alpha)^{m-1}} + \cdots + \frac{A_m}{(x - \alpha)} + \frac{B_1}{(x - \beta)^m} + \frac{B_2}{(x - \beta)^{m-1}} + \cdots + \frac{B_m}{(x - \beta)}$$

بالتالي التكامل I يحسب بسهولة

الحالة الثانية: $\Delta = 0$ عندئذ لثلاثي الحدود $ax^2 + bx + c$ جذر مضاعف هو $\alpha = \frac{-b}{2a}$

عندئذ

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2$$

$$I = \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^m} = \frac{1}{a^m} \int \frac{dx}{(x - \alpha)^{2m}} = \frac{1}{a^m} \times \frac{(x - \alpha)^{-2m+1}}{-2m + 1} + c$$

الحالة الثالثة: $\Delta < 0$ عندئذ ثلاثي الحدود $ax^2 + bx + c$ لا يملك جذور حقيقية عندئذ نتمم إلى مربع كامل نجد

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$$

نضع $r^2 = -\frac{\Delta}{4a^2}$ بالتالي

$$ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + r^2\right)$$

$$I = \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^m} = \frac{1}{a^m} \int \frac{dx}{\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + r^2\right)^m}$$

ثم نستخدم الدستور التدريجي فنحصل على I

مثال7: أنجز التكامل

$$\mathrm{I} = \int \frac{dx}{(x^2 - x - 2)^2}$$

الحلّ: لثلاثي الحدود $x^2 - x - 2$ جذران مختلفان هما α و β حيث $\beta = -1$, $\alpha = 2$
عندئذ

$$x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$$

$$I = \int \frac{dx}{(x^2 - x - 2)^2} = \int \frac{dx}{(x+1)^2(x-2)^2}$$

نحلل الكسر $\frac{1}{(x+1)^2(x-2)^2}$ إلى مجموع كسور جزئية بالشكل:

$$\frac{1}{(x+1)^2(x-2)^2} = \frac{A_1}{(x+1)^2} + \frac{A_2}{(x+1)} + \frac{B_1}{(x-2)^2} + \frac{B_2}{(x-2)} \ldots.(*)$$

A_1: نضرب طرفي العلاقة $(*)$ بـ $(x+1)^2$ ثم نعوض في العلاقة الناتجه بـ $x = -1$ نجد

$$A_1 = \frac{1}{9}$$

B_1 : نضرب طرفي العلاقة $(*)$ بـ $(x-2)^2$ ثم نعوض في العلاقة الناتجه بـ $x = 2$ نجد

$$B_1 = \frac{1}{9}$$

- نضرب طرفي العلاقة $(*)$ بـ x ونجعل $x \longrightarrow +\infty$ نجد

$$A_2 + B_2 = 0 \quad \ldots(1)$$

- نعوض في طرفي العلاقة $(*)$ $x = 0$ نجد

$$\frac{1}{4} = A_1 + A_2 + \frac{1}{4}B_1 - \frac{1}{2}B_2$$

بالتالي

$$A_2 - \frac{1}{2}B_2 = \frac{1}{9} \quad \ldots(2)$$

نحل (1) و (2) حلاً مشتركاً نجد $A_2 = \frac{2}{27}$ و $B_2 = -\frac{2}{27}$

$$I = \int \frac{dx}{(x^2 - x - 2)^2} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{(x+1)^2} + \frac{2}{27}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{9}\int \frac{dx}{(x-2)^2} - \frac{2}{27}\int \frac{dx}{x-2}$$

$$I = -\frac{1}{9(x+1)} + \frac{2}{27}ln|x+1| - \frac{1}{9(x-2)} - \frac{2}{27}ln|x-2| + c$$

مثال8: أنجز التكامل التالي

$$\mathrm{I} = \int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 1)^4}$$

الحلّ: ثلاثي الحدود $x^2 + 2x + 1$ يملك جذر مضاعف هو $\alpha = \frac{-b}{2a} = -1$
عندئذ

$$x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$$

$$I = \int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 1)^4} = \int \frac{dx}{(x+1)^8} = -\frac{1}{7(x+1)^7} + c$$

مثال9: أنجز التكامل التالي

$$\mathrm{I} = \int \frac{dx}{(x^2 - 4x + 5)^3}$$

الحلّ: مميز ثلاثي الحدود $x^2 - 4x + 5$ هو $\Delta = -4 < 0$ عندئذ ثلاثي الحدود$x^2 - 4x + 5$ لايملك جذور حقيقية
عندئذ نتمم إلى مربع كامل نجد

$$x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1$$

$$I = \int \frac{dx}{((x-2)^2 + 1)^3}$$

لنضع $I = J_3$ حيث

$$J_3 = \int \frac{dx}{((x-2)^2 + 1)^3}$$

نضع $x - 2 = t$ بالتالي $dx = dt$

$$J_3=\int\frac{dt}{(t^2+1)^3}$$

نحل هذا التكامل باستخدام الدستور التدريجي، نلاحظ بأنّ $r^2=1$ نجد

$$J_3=J_{2+1}=\frac{1}{2\times 1\times 2}\left[\frac{t}{(t^2+1)^2}+(2\times 2-1)J_2\right]$$

$$J_3=\frac{t}{4(t^2+1)^2}+\frac{3}{4}J_2$$

$$J_2=J_{1+1}=\frac{1}{2\times 1\times 1}\left[\frac{t}{(t^2+1)^1}+(2\times 1-1)J_1\right]$$

$$J_2=\frac{t}{2(t^2+1)}+\frac{1}{2}J_1$$

$$J_1=\int\frac{dt}{t^2+1}=arctan(t)+c_1$$

نعوض بشكل تراجعي نجد

$$J_2=\frac{t}{2(t^2+1)}+\frac{1}{2}\,arctan(t)+\frac{1}{2}c_1$$

عندئذ

$$J_3=\frac{t}{4(t^2+1)^2}+\frac{3}{4}\left(\frac{t}{2(t^2+1)}+\frac{1}{2}\,arctan(t)+\frac{1}{2}c_1\right)$$

$$J_3=\frac{t}{4(t^2+1)^2}+\frac{3t}{8(t^2+1)}+\frac{3}{8}arctan(t)+c$$

بالتالي

$$I=J_3=\frac{x-2}{4((x-2)^2+1)^2}+\frac{3(x-2)}{8((x-2)^2+1)}+\frac{3}{8}arctan(x-2)+c$$

دراسة التكامل من النمط $I=\int\frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^m}dx$

لدراسة التكامل من النمط $I=\int\frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^m}dx$ نكتبه بالشكل:

$$\int\frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^m}dx=\int\frac{A(2ax+b)}{(ax^2+bx+c)^m}dx+\int\frac{B}{(ax^2+bx+c)^m}dx$$

حيث A و B ثوابت يُطلب تعيينها

نشتق الطرفين ثم نضرب الطرفين بـ $(ax^2+bx+c)^m$ نجد $Mx+N=A(2ax+b)+B$

بالمطابقه نحصل على الثابتين A و B بالتالي

$$I=A\times\frac{(ax^2+bx+c)^{-m+1}}{-m+1}+BI_1$$

حيث $I_1=\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^m}$ و هذا التكامل تم مناقشته سابقاً

مثال10: أنجز التكامل

$$I=\int\frac{2x+2}{(x^2-3x+2)^2}dx$$

الحلّ: نكتب I بالشكل

$$\int \frac{2x+2}{(x^2-3x+2)^2}dx = \int \frac{A(2x-3)}{(x^2-3x+2)^2}dx + \int \frac{B}{(x^2-3x+2)^2}dx$$

نشتق الطرفين ثم نضرب الطرفين بـ $(x^2-3x+2)^2$ نجد

$$2x+2 = A(2x-3)+B$$

$$2x+2 = 2Ax-3A+B$$

بالمطابقه نجد $A=1$ و $B=5$ بالتالي

$$\boldsymbol{I} = \int \frac{(2x-3)}{(x^2-3x+2)^2}dx + 5\int \frac{dx}{(x^2-3x+2)^2} = -\frac{1}{x^2-3x+2} + 5I_1$$

حيث

$$I_1 = \int \frac{dx}{(x^2-3x+2)^2}$$

$$I_1 = \int \frac{dx}{(x-2)^2(x-1)^2}$$

نحلل الكسر $\frac{1}{(x-2)^2(x-1)^2}$ إلى مجموع كسور جزئية بالشكل:

$$\frac{1}{(x-2)^2(x-1)^2} = \frac{A_1}{(x-2)^2} + \frac{A_2}{(x-2)} + \frac{B_1}{(x-1)^2} + \frac{B_2}{(x-1)} \dots .(*)$$

A_1: نضرب طرفي العلاقة $(*)$ بـ $(x-2)^2$ ثم نعوض $x=2$ في العلاقة الناتجه نجد $A_1=1$

B_1 : نضرب طرفي العلاقة $(*)$ بـ $(x-1)^2$ ثم نعوض $x=1$ في العلاقة الناتجه نجد $B_1=1$

- نضرب طرفي العلاقة $(*)$ بـ x ونجعل $x \longrightarrow +\infty$ نجد

$$A_2+B_2=0 \quad \dots(1)$$

- نعوض في طرفي العلاقة $(*)$ بـ $x=0$ نجد

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4}A_1 - \frac{1}{2}A_2 + B_1 - B_2$$

بالتالي

$$A_2+2B_2=2 \quad \dots(2)$$

نحل (1) و (2) حلاً مشتركاً نجد $A_2=-2$ و $B_2=2$

$$I_1 = \int \frac{dx}{(x^2-3x+2)^2} = \int \frac{dx}{(x-2)^2} - 2\int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{dx}{(x-1)^2} + 2\int \frac{dx}{x-1}$$

$$I_1 = -\frac{1}{(x-2)} - 2ln|x-2| - \frac{1}{(x-1)} + 2ln|x-1| + c_1$$

بالتالي

$$\boldsymbol{I} = -\frac{1}{x^2-3x+2} + 5\left(-\frac{1}{(x-2)} - 2ln|x-2| - \frac{1}{(x-1)} + 2ln|x-1| + c_1\right)$$

$$\boldsymbol{I} = -\frac{1}{x^2-3x+2} - \frac{5}{(x-2)} - \frac{5}{(x-1)} + 10ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right| + c$$
