المحاضرة الثالثة
(نظري)

المحتوى العلمي لهذه المحاضرة يتضمن مايلي:

- ❖ **الطرق الرئيسية في المكاملة**
  - ➢ **الطريقة المباشرة**
  - ➢ **طريقة تغيير المتحول**
  - ➢ **طريقة المكاملة بالتجزئة**
- ❖ **العديد من الأمثلة المتعلقة بالطرق الرئيسية في المكاملة.**

الطرق الرئيسية في المكاملة

1. **الطريقه المباشرة:** تعتمد على رد التكامل المعطى إلى تكاملات شهيرة وذلك بالاعتماد على خواص التكامل غير المحدد وبعض العلاقات الجبرية.

مثال:

$$I=\int 2^{x}5^{2x}dx=\int 2^{x}25^{x}dx=\int (50)^{x}dx=\frac{(50)^{x}}{\ln(50)}+c$$

مثال:

$$I=\int cot^{2}2xdx=\int \frac{cos^{2}2x}{sin^{2}2x}dx=\int \frac{1-sin^{2}2x}{sin^{2}2x}dx=\int\left(\frac{1}{sin^{2}2x}-1\right)dx=-\frac{1}{2}cot2x-x+c$$

مثال:

$$I=\int\left(sin\frac{x}{3}+cos\frac{x}{3}\right)^{2}dx=\int\left(sin^{2}\left(\frac{x}{3}\right)+cos^{2}\left(\frac{x}{3}\right)+2sin\frac{x}{3}cos\frac{x}{3}\right)dx$$
$$=\int\left(1+sin\left(\frac{2x}{3}\right)\right)dx=x-\frac{3}{2}cos\left(\frac{2x}{3}\right)+c$$

مثال:

$$I=\int\frac{chx-shx}{chx+shx}dx=\int\frac{(chx-shx)^{2}}{(chx+shx)(chx-shx)}dx=\int\frac{ch^{2}x+sh^{2}x-2shx\,chx}{(ch^{2}x-sh^{2}x)}dx$$
$$=\int\frac{ch2x-sh2x}{1}dx=\int(ch2x-sh2x)\,dx=\frac{1}{2}sh2x-\frac{1}{2}ch2x+c$$

مثال:

$$I=\int\frac{dx}{xln(x)}=\int\frac{\frac{1}{x}}{ln(x)}dx=ln|ln(x)|+c$$

2. طريقة تغيير المتحول

إذا لم يكن من السهولة رد التكامل المعطى إلى تكاملات موجوده في جدول التكاملات الشهيرة، فإننا نضطر أحياناً لتغيير متحول المكاملة x إلى متحول جديد t وفق العلاقة $x=\varphi(t)$ حيث $\varphi(t)$ دالة مستمرة و المشتق الأول لها مستمر أيضاً وعندئذٍ يكون لدينا:

$$\int f(x)dx=\int f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)dt$$

نوجد هذا التكامل بدلالة t ثم نبدل في ناتج التكامل النهائي t بما يساويها بدلالة x.

مثال: أنجز التكامل

$$I_{1}=\int\frac{x^{3}}{(x-1)^{2}}dx$$

الحلّ:

نفرض أن $t=x-1$ و منه $dt=dx$

$$I_{1}=\int\frac{(t+1)^{3}}{t^{2}}dt=\int\left(\frac{t^{3}+3t^{2}+3t+1}{t^{2}}\right)dt=\int\left(t+3+\frac{3}{t}+\frac{1}{t^{2}}\right)dt$$
$$=\frac{t^{2}}{2}+3t+3ln|t|-\frac{1}{t}+c=\frac{(x-1)^{2}}{2}+3(x-1)+3ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+c$$

مثال: أنجز التكامل

$$I_2 = \int \sqrt{3x+1}dx$$

الحلّ: نفرض $t = \sqrt{3x+1}$ عندئذ $t^2 = 3x+1$ فيكون $2tdt = 3dx$ وبالتالي $dx = \frac{2}{3}tdt$

$$I_2 = \int t\left(\frac{2}{3}t\right)dt = \frac{2}{3}\int t^2\,dt = \frac{2}{9}t^3 + c = \frac{2}{9}\left[(3x+1)^{\frac{1}{2}}\right]^3 + c = \frac{2}{9}\sqrt{(3x+1)^3} + c$$

مثال: أنجز التكامل

$$I_3 = \int \frac{1}{\sqrt{x}} sin\sqrt{x}dx$$

الحلّ: نفرض $t = \sqrt{x}$ فيكون $dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \frac{1}{2t}dx$ وبالتالي $dx = 2tdt$

$$I_3 = \int \frac{1}{\sqrt{x}} sin\sqrt{x}dx = \int 2sintdt = -2cost + c = -2cos\sqrt{x} + c$$

مثال: أنجز التكامل

$$I_4 = \int \frac{1}{x} cos\big(ln(x)\big)dx$$

الحلّ: نفرض $t = ln(x)$ فيكون $dt = \frac{1}{x}dx$

$$I_4 = \int \frac{1}{x} cos\big(ln(x)\big)dx = \int costdt = sint + c = sin(\ln(x)) + c$$

مثال: أنجز التكامل

$$I_5 = \int x\sqrt{3-x}dx$$

الحلّ: نفرض $t = 3 - x$ فيكون $dt = -dx$

$$I_5 = \int x\sqrt{3-x}dx = -\int (3-t)\sqrt{t}dt = \int \left(+t^{\frac{3}{2}} - 3t^{\frac{1}{2}}\right)dt = \frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - 3\times\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} - 2t^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{5}\sqrt{t^5} - 2\sqrt{t^3} + c$$

$$= \frac{2}{5}\sqrt{(3-x)^5} - 2\sqrt{(3-x)^3} + c$$

الآن نقدم قواعد مهمة لحساب بعض التكاملات

قواعد هامة جداً:

من أجل $a > 0$ و $b > 0$

تكامل التابع $f(x)$ $\left(\int f(x)dx\right)$	التابع $f(x)$
$\frac{1}{b}arcsin\left(\frac{bx}{a}\right) + c \quad or \; -\frac{1}{b}arccos\left(\frac{bx}{a}\right) + c$ حيث $x \in]-1,1[$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2x^2}}$
$ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + c$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$
$ln\left\|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right\| + c$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}$
$\frac{1}{ab}arctan\left(\frac{bx}{a}\right) + c$	$f(x) = \frac{1}{a^2 + b^2x^2}$
$\frac{1}{2ab}ln\left\|\frac{a+bx}{a-bx}\right\| + c$	$f(x) = \frac{1}{a^2 - b^2x^2}$

اثبات الخاصة 4

$$I=\int\frac{dx}{a^2+b^2x^2}=\frac{1}{ab}arctan\left(\frac{bx}{a}\right)+c$$

$$I=\int\frac{dx}{a^2+b^2x^2}=\int\frac{dx}{a^2\left(1+\left(\frac{bx}{a}\right)^2\right)}=\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{\left(1+\left(\frac{bx}{a}\right)^2\right)}$$

نضع $t=\frac{bx}{a}$ بالتالي

$$dt=\frac{b}{a}dx$$

$$I=\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{\left(1+\left(\frac{bx}{a}\right)^2\right)}=\frac{1}{ab}\int\frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{ab}arctant+c=\frac{1}{ab}arctan\left(\frac{bx}{a}\right)+c$$

أمثلة:

$$I_1=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+25}}=ln\left(x+\sqrt{x^2+25}\right)+c$$

$$I_2=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-2}}=ln\left|x+\sqrt{x^2-2}\right|+c$$

$$I_3=\int\frac{dx}{\sqrt{5-2x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2x^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}arcsin\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{5}}\right)+c\ or-\frac{1}{\sqrt{2}}arccos\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{5}}\right)+c$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{5}}x\right)+c\ or-\frac{1}{\sqrt{2}}arccos\left(\sqrt{\frac{2}{5}}x\right)+c$$

$$I_4=\int\frac{dx}{7+2x^2}=\int\frac{dx}{\left(\sqrt{7}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2x^2}=\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{7}}arctan\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{7}}\right)+c$$

$$=\frac{1}{\sqrt{14}}arctan\left(\sqrt{\frac{2}{7}}x\right)+c$$

$$I_5=\int\frac{dx}{2-4x^2}=\frac{1}{2\sqrt{2}\times 2}ln\left|\frac{\sqrt{2}+2x}{\sqrt{2}-2x}\right|+c$$

3. طريقه بالمكاملة بالتجزئة

لتكن لدينا الدالتان $u(x),v(x)$ القابلتان للاشتقاق حيث المشتق الأول لكل منهما دالة مستمرة على مجال ما، يُعطى دستور التكامل بالتجزئة بالعلاقة الآتية:

$$\int udv=uv-\int vdu$$

مثال: استخدم طريقة المكاملة بالتجزئة لإيجاد

$$I=\int\frac{x}{sin^2x}dx$$

الحلّ: نضع

$$u=x,\ \ du=dx$$

$$dv=\frac{dx}{sin^2x},\ \ v=-cotx$$

$$I = uv - \int vdu = -x\, cotx + ln|sinx| + c$$

مثال: أنجز التكامل

$$I = \int x \cos x \, dx$$

الحلّ: نضع

$$u = x, \quad du = dx$$
$$dv = \cos x \, dx, \quad v = \sin x$$
$$I = x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x + c$$

ملاحظة: إن دستور التكامل بالتجزئة يُسهل علينا حساب التكامل إذا أحسنا اختيار كل من $u\,, dv$ فمثلاً في التكامل السابق في حال فرضنا $u(x) = \cos x$ و $dv = xdx$ لحصلنا على تكامل أصعب من التكامل I، لذلك سنصنف الجزء الأكبر من التكاملات في ثلاث مجموعات لكل منها فرضيتها الخاصة، مع التأكيد على ان المجموعات الثلاث لا تشمل كل التكاملات التي يمكن حلّها بطريقة التجزئة.

المجموعة الأولى: التكاملات من الشكل

$$\int P_n(x)arcsin(bx)dx \;\; \int P_n(x)arccos(bx)dx \;،\; \int P_n(x)arctan(bx)dx$$
$$\int P_n(x)arcot(bx)dx \;،\; \int P_n(x)ln^m(bx)dx$$

حيث $P_n(x)$ كثير حدود من الدرجة n و m عدد طبيعي و b عدد حقيقي غير معدوم

لحلّ هذه التكاملات نكامل بالتجزئة حيث نفرض أن $dv = P_n(x)dx$ والباقي في العبارة المكاملة هو u.

أمثلة:

مثال: أنجز التكامل

$$I = \int xln(x)\, dx$$

الحلّ: نضع

$$u = ln(x), \quad du = \frac{dx}{x}$$
$$dv = xdx, \quad v = \frac{1}{2}x^2$$

بالتالي:

$$I = \frac{1}{2}x^2 ln(x) - \int \frac{1}{2}x^2 \times \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}x^2 ln(x) - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{1}{2}x^2 ln(x) - \frac{1}{4}x^2 + c$$

مثال: أنجز التكامل

$$I = \int arcsin(x)dx$$

الحلّ:

نضع

$$u = arcsin(x), \quad du = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$
$$dv = dx, \quad v = x$$

نعوض في دستور التكامل بالتجزئة:

$$I = xarcsin(x) - \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = xarcsin(x) + \int \frac{-2xdx}{2\sqrt{1-x^2}}$$
$$I = xarcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + c$$

مثال: أنجز التكامل

$$I = \int ln(x)dx$$

الحلّ: نضع

$$u = ln(x),\ \ du = \frac{dx}{x}$$
$$dv = dx,\ \ v = x$$

بالتالي:

$$I = xln(x) - \int dx = xln(x) - x + c$$

مثال: أنجز التكامل

$$I = \int x^3 ln(x)dx$$

الحلّ: نضع

$$u = ln(x),\ \ du = \frac{dx}{x}$$
$$dv = x^3dx,\ \ v = \frac{x^4}{4}$$

بالتالي:

$$I = \frac{x^4}{4}ln(x) - \int \frac{x^3}{4}dx = \frac{x^4}{4}ln(x) - \frac{x^4}{16} + c$$

مثال: أنجز التكامل

$$I = \int xln^2(x)dx$$

الحلّ: نضع

$$u = ln^2(x),\ \ du = \frac{2ln(x)}{x}dx$$
$$dv = xdx,\ \ v = \frac{x^2}{2}$$

بالتالي:

$$I = \frac{x^2}{2}ln^2(x) - \underbrace{\int xln(x)dx}_{J}$$

وجدنا في مثال سابق أنّ

$$J = \int xln(x)dx \ = \frac{1}{2}x^2ln(x) - \frac{1}{4}x^2 + c_1$$

بالتالي

$$I = \frac{x^2}{2}ln^2(x) - \frac{1}{2}x^2ln(x) + \frac{1}{4}x^2 + c$$

مثال: أنجز التكامل

$$I = \int xartan(x)dx$$

الحلّ: نضع

$$u = arctan(x), \quad du = \frac{dx}{1 + x^2}$$
$$dv = xdx, \quad v = \frac{x^2}{2}$$

بالتالي:

$$I = \frac{1}{2}x^2arctan(x) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2dx}{1 + x^2} = \frac{1}{2}x^2arctan(x) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2 + 1 - 1}{x^2 + 1}dx$$
$$= \frac{1}{2}x^2arctan(x) - \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{x^2 + 1}\right)dx$$
$$= \frac{1}{2}x^2arctan(x) - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}arctan(x) + c$$

المجموعة الثانية: التكاملات من الشكل

$$\int P_n(x)e^{ax}dx \text{ ، } \int P_n(x)\sin \alpha x\, dx \text{ ، } \int P_n(x)\cos \alpha x\, dx$$

حيث $P_n(x)$ كثير حدود من الدرجة n و a و α ثابتين حقيقيين

لحلّ هذه التكاملات نكامل بالتجزئة حيث نفرض $u(x) = P_n(x)$ والباقي في العبارة المكاملة نختاره مساوياً لـ dv، ثم نعوض بدستور التكامل بالتجزئة.

هنا نستخدم قانون المكامله بالتجزئة n مره حيث n درجة كثيرة الحدود $P_n(x)$.

مثال: أنجز التكامل

$$I = \int xsinxdx$$

الحلّ: نضع

$$u = x, \quad du = dx$$
$$dv = sinxdx, \quad v = -cosx$$
$$I = -xcosx + \int cosx\, dx = -xcosx + \sin x + c$$

مثال: أنجز التكامل

$$I = \int (x^2 - 6x + 2)\, e^{3x}dx$$

الحلّ: نضع

$$u = x^2 - 6x + 2, \quad du = (2x - 6)dx$$
$$dv = e^{3x}dx, \quad v = \frac{1}{3}e^{3x}$$

عندئذٍ

$$I = \frac{1}{3}(x^2 - 6x + 2)e^{3x} - \int \frac{1}{3}(2x - 6)e^{3x}dx$$
$$I = \frac{1}{3}(x^2 - 6x + 2)e^{3x} - \frac{2}{3}\underbrace{\int (x - 3)e^{3x}dx}_{J}$$

نكامل J بالتجزئة أيضاً فنفرض

$$u = x - 3,\ \ du = dx$$
$$dv = e^{3x}dx,\ \ v = \frac{1}{3}e^{3x}$$

ومنه:

$$J = \frac{1}{3}(x-3)e^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}(x-3)e^{3x} - \frac{1}{9}\,e^{3x} + c_1$$

نعوض في عبارة I نجد:

$$I = \frac{1}{3}(x^2-6x+2)e^{3x} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}(x-3)e^{3x} - \frac{1}{9}\,e^{3x} + c_1\right)$$

و بالتالي:

$$I = \frac{1}{3}(x^2-6x+2)e^{3x} - \frac{2}{9}(x-3)e^{3x} + \frac{2}{27}e^{3x} + c$$

مثال: أنجز التكامل

$$I = \int x^2\,cosxdx$$

الحلّ: نضع

$$u = x^2,\ \ du = 2xdx$$
$$dv = cosxdx,\ \ v = sinx$$

عندئذٍ:

$$I = x^2 sinx - \int 2x\,sinxdx$$
$$I = x^2 sinx - \underbrace{\int 2xsinxdx}_{J}$$

نكامل J بالتجزئة أيضاً فنفرض

$$u = 2x,\ \ du = 2dx$$
$$dv = sinxdx,\ \ v = -cosx$$

ومنه:

$$J = -2xcosx + 2sinx + c_1$$

نعوض في عبارة I نجد:

$$I = x^2 sinx + 2xcosx - 2sinx + c$$

المجموعة الثالثة: التكاملات من الشكل

$$I = \int e^{ax}\cos bx\,dx \text{ ، } I = \int e^{ax}\sin bx\,dx; a,b \in \mathbb{R}$$

تُحلّ بالتجزئة حيث نفرض أن $u(x)$ هو إما الدالة الأسية أو المثلثية و ما يبقى داخل العباره المكاملة هو dv.

(توضيح: هنا نطبق قانون المكاملة بالتجزئة مرتين متتاليتين، فنحصل على معادلة خطيه في I، نوجد منها قيمة I، مع الاشاره إلى أنّ اختيار u و dv في هذه التكاملات غير مهم)

مثال: أنجز التكامل

$$I = \int e^{2x} sin(3x)\,dx$$

الحلّ: نفرض

$$u = e^{2x},\ \ du = 2e^{2x}dx$$

$$dv = sin(3x)dx,\ \ v = -\frac{1}{3}cos(3x)$$
$$I = -\frac{1}{3}e^{2x}cos(3x) + \frac{2}{3}\underbrace{\int e^{2x}\cos 3x\,dx}_{J}$$

نكامل J بالتجزئة:

$$u = e^{2x},\ \ du = 2e^{2x}dx$$
$$dv = cos(3x)dx,\ \ v = \frac{1}{3}sin(3x)$$

عندئذ:

$$J = \frac{1}{3}e^{2x}sin(3x) - \frac{2}{3}\int e^{2x}sin(3x)\,dx = \frac{1}{3}e^{2x}sin(3x) - \frac{2}{3}I$$

نعوض في عبارة I :

$$I = -\frac{1}{3}e^{2x}cos(3x) + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}e^{2x}sin(3x) - \frac{2}{3}I\right)$$
$$I = -\frac{1}{3}e^{2x}cos(3x) + \frac{2}{9}\ e^{2x}sin(3x) - \frac{4}{9}I$$
$$I + \frac{4}{9}I = -\frac{1}{3}e^{2x}cos(3x) + \frac{2}{9}\ e^{2x}sin(3x)$$
$$\frac{13}{9}I = -\frac{1}{3}e^{2x}cos(3x) + \frac{2}{9}\ e^{2x}sin(3x)$$
$$I = \frac{9}{13}\left(-\frac{1}{3}e^{2x}.cos(3x) + \frac{2}{9}\ e^{2x}sin(3x)\right)$$
$$I = -\frac{3}{13}e^{2x}cos(3x) + \frac{2}{13}\ e^{2x}sin(3x) + c$$

مثال: أنجز التكامل

$$\int e^{x}\,sin\,x\,dx$$

الحلّ: بسهوله نجد

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{x}}{2}(-cosx + sinx) + c$$
