المحاضرة الثانية
(نظري)

المحتوى العلمي للمحاضرة يتضمن مايلي:

- **مفهوم الدالة الأصلية.**
- **مفهوم التكامل غير المحدد وبعض الخواص الذي يتمتع بها.**
- **قواعد لحساب بعض التكاملات غير المحددة لدوال شهيرة.**

.

التكامل غير المحدد

تعريف: الدالة الأصلية

يُقال عن الدالة $F(x)$ بأنّها دالة أصلية للدالة $f(x)$ على المجال I إذا تحقق ما يلي:

1. $F(x)$ دالة اشتقاقية على المجال I.
2. $\acute{F}(x) = f(x)$

مثال: الدالة $F(x) = arcsin(x)$ هي دالة أصلية للدالة $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ على المجال $I =]-1,1[$

لأن:

$$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ , \forall x \in]-1,1[$$

مثال: $F(x) = \sqrt{1-x^2}$ هي دالة أصلية للتابع $f(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ على المجال $I =]-1,1[$

مثال: $F(x) = -cos2x$ هي دالة أصلية للتابع $f(x) = 2sin2x$ على $I = \mathbb{R}$

ملاحظة: إذا كانت $F(x)$ دالة أصلية للدالة $f(x)$ على المجال I عندئذ

$(F(x) + c)$ داله أصلية لـ $f(x)$ على المجال I حيث $c \in \mathbb{R}$

تعريف:(التكامل غير المحدد)

نُسمي مجموعة جميع الدوال الأصلية $(F(x) + c)$ للدالة $f(x)$ على المجال I بالتكامل غير المحدد ويرمز له بالرمز

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

حيث c ثابت اختياري، ندعو:

- ❖ x متغير المكاملة، c ثابت التكامل.
- ❖ $f(x)dx$ العباره المكاملة.
- ❖ $f(x)$ الدالة المكاملة.

- تعني كلمة غير محدد أنّ الشكل العام للدالة الأصلية يحوي ثابتاً اختيارياً.
- التكامل غير المحدد هو دالة مشتقها مساوٍ للدالة المكاملة وتفاضلها مساوٍ للعبارة المكاملة.

مثال:

$$\int sinxdx = -cosx + c$$

الخواص الأساسية للتكامل غير المحدد:

1. $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$ أي تفاضل التكامل غير المحدد هو العبارة المكاملة.
2. مشتق التكامل غير المحدد هو الدالة المكاملة.
3. $\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx$ حيث $\alpha \in \mathbb{R}$
4. $\int (f(x) + g(x) - h(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx - \int h(x)dx$
5. $\int f(x)dx = \int f(t)dt$ أي لا يتغير التكامل غير المحدد لدالة إذا غيرنا رمز متحول المكاملة.

ندرس الآن قواعد لحساب بعض التكاملات غير المحددة لدوال شهيرة

المجموعة الأولى

$f(x)$ التابع	$f(x)$ تكامل التابع $\left(\int f(x)dx\right)$
$f(x)=a\,;a\in\mathbb{R}$	$ax+c$
$f(x)=x^n\,;n\neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert+c$
$f(x)=\frac{1}{ax+b}\,;a\neq 0$	$\frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert+c$
$f(x)=e^{ax}\,;a\neq 0$	$\frac{1}{a}e^{ax}+c$
$f(x)=a^x\,;a>0\ \&\ a\neq 1$	$\frac{a^x}{\ln(a)}+c$

مثال:

$$\int\left(x^3+\frac{1}{x}+e^{\frac{1}{2}x}+3\right)dx=\frac{x^4}{4}+\ln|x|+2e^{\frac{1}{2}x}+3x+c$$

مثال:

$$\int\left(5^x+2^{2x}+\frac{1}{2x+1}+e\right)dx=\frac{5^x}{ln(5)}+\frac{4^x}{ln(4)}+\frac{1}{2}\ln|2x+1|+ex+c$$

مثال:

$$\int\frac{x+1}{\sqrt{x}}dx=\int\frac{x}{\sqrt{x}}\,dx+\int\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx=\int x^{\frac{1}{2}}dx+\int x^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+c$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+2\sqrt{x}+c$$

المجموعة الثانية

من أجل α عدد حقيقي غير معدوم

$f(x)$ التابع	$f(x)$ تكامل التابع $\left(\int f(x)dx\right)$
$f(x)=sinx$	$-cosx+c$
$f(x)=sin\alpha x$	$-\frac{1}{\alpha}cos\alpha x+c$
$f(x)=cosx$	$\sin x+c$
$f(x)=cos\alpha x$	$\frac{1}{\alpha}sin\alpha x+c$
$f(x)=\frac{1}{cos^2x}$	$tanx+c$
$f(x)=\frac{1}{cos^2\alpha x}$	$\frac{1}{\alpha}tan\alpha x+c$
$f(x)=\frac{1}{sin^2x}$	$-cotx+c$
$f(x)=\frac{1}{sin^2\alpha x}$	$-\frac{1}{\alpha}cot\alpha x+c$

مثال:

$$\int \left(sin7x + cos\left(\frac{1}{2}x\right)\right)dx = -\frac{1}{7}cos7x + 2sin\left(\frac{1}{2}x\right) + c$$

مثال:

$$\int \left(\frac{1}{sin^2 3x} + \frac{1}{cos^2\left(\frac{1}{2}x\right)} + \pi^e + 4\right)dx = -\frac{1}{3}cot3x + 2tan\left(\frac{1}{2}x\right) + (\pi^e + 4)x + c$$

مثال:

$$\int (sin2x - cos2x)^2 dx = \int (sin^2 2x + cos^2 2x - 2sin2xcos2x)dx = \int (1 - sin4x)dx$$
$$= x + \frac{1}{4}cos4x + c$$

مثال:

$$\int sin^2 2xdx = \int \left(\frac{1 - cos4x}{2}\right)dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}cos4x\right)dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}sin4x + c$$

المجموعة الثالثة

من أجل α عدد حقيقي غير معدوم

$f(x)$ التابع	$f(x)$ تكامل التابع $\left(\int f(x)dx\right)$
$f(x) = shx$	$chx + c$
$f(x) = sh\alpha x$	$\frac{1}{\alpha}ch\alpha x + c$
$f(x) = chx$	$shx + c$
$f(x) = ch\alpha x$	$\frac{1}{\alpha}sh\alpha x + c$
$f(x) = \frac{1}{ch^2 x}$	$thx + c$
$f(x) = \frac{1}{ch^2 \alpha x}$	$\frac{1}{\alpha}th\alpha x + c$
$f(x) = \frac{1}{sh^2 x}$	$-cthx + c$
$f(x) = \frac{1}{sh^2 \alpha x}$	$-\frac{1}{\alpha}cth\alpha x + c$

مثال:

$$\int \left(sh2x + \frac{3}{sh^2 5x} + e^{\pi x} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)dx = \frac{1}{2}ch2x - \frac{3}{5}cth5x + \frac{1}{\pi}e^{\pi x} + \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}x + c$$

مثال:

$$\int \left(\frac{1}{ch^2 2x} + 3^x + x^7\right)dx = \frac{1}{2}th2x + \frac{3^x}{ln(3)} + \frac{x^8}{8} + c$$

مثال:

$$\int (chx+shx)^2 dx = \int (ch^2x + sh^2x + 2shxchx)dx = \int (ch2x + sh2x)dx = \frac{1}{2}sh2x + \frac{1}{2}ch2x + c$$

مثال:

$$\int sh^2 x dx = \int \left(\frac{ch2x-1}{2}\right)dx = \int \left(\frac{1}{2}ch2x - \frac{1}{2}\right)dx = \frac{1}{4}sh2x - \frac{1}{2}x + c$$

المجموعة الرابعة

$f(x)$ التابع	$f(x)$ تكامل التابع $\left(\int f(x)dx\right)$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$arcsin(x) + c \quad or - arccos(x) + c$ حيث $x \in]-1,1[$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + c$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$ln\left\|x + \sqrt{x^2-1}\right\| + c$
$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$arctan(x) + c$
$f(x) = \frac{1}{1-x^2}$	$\frac{1}{2}ln\left\|\frac{1+x}{1-x}\right\| + c$

مثال:

$$\int \left(\frac{2}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{1}{3\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{1+x^2}\right)dx = 2ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + \frac{1}{3}ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + arctan(x) + c$$

مثال:

$$\int \left(\frac{4}{2-2x^2} + \frac{1}{sh^2 4x} + x\right)dx = 2 \times \frac{1}{2}ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - \frac{1}{4}cth4x + \frac{x^2}{2} + c$$

تمرين:

$$\int tan^2 x dx = \int \frac{sin^2 x}{cos^2 x}dx = \int \frac{1-cos^2 x}{cos^2 x}dx = \int \left(\frac{1}{cos^2 x} - 1\right)dx = tanx - x + c$$

تمرين:

$$\int \frac{x^2+2x+1}{x}dx = \int \left(x + 2 + \frac{1}{x}\right)dx = \frac{x^2}{2} + 2x + ln|x| + c$$

تمرين:

$$\int \left(3^x e^x + cos2x + \frac{4}{\sqrt{2x^2+2}}\right)dx = \frac{(3e)^x}{1+\ln(3)} + \frac{1}{2}sin2x + 2\sqrt{2}ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + c$$

قواعد هامة جداً:

$\int \frac{\acute{f}(x)}{f(x)}dx = ln\|f(x)\| + c$
$\int \frac{\acute{f}(x)}{2\sqrt{f(x)}}dx = \sqrt{f(x)} + c$
$\int \acute{f}(x)\big(f(x)\big)^n dx = \frac{\big(f(x)\big)^{n+1}}{n+1} + c \ ; \quad n \neq -1$
$\int \acute{f}(x)e^{f(x)}dx = e^{f(x)} + c$

مثال:

$$\int \frac{x^2}{1+x^3}dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{1+x^3}dx = \frac{1}{3}ln|1+x^3| + c$$

مثال:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}dx = \sqrt{x^2+1} + c$$

طريقه ثانيه:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int x(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{2}\int 2x(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{2} \times \frac{(x^2+1)^{-\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}} + c$$

$$= \sqrt{x^2+1} + c$$

مثال:

$$\int tanxdx = \int \frac{sinx}{cosx}dx = -\int \frac{-sinx}{cosx}dx = -ln|cosx| + c$$

مثال:

$$\int sinx\, e^{cosx}dx = -\int (-sinx)\, e^{cosx}dx = -e^{cosx} + c$$

مثال:

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}dx = 2\sqrt{e^x+1} + c$$

مثال:

$$\int sinx\, cos^3 xdx = -\int (-sinx)\, cos^3 xdx + c = -\frac{cos^4 x}{4} + c$$

مثال:

$$\int shx\sqrt{1+chx}\, dx = \int shx(1+chx)^{\frac{1}{2}}\, dx = \frac{2}{3}(1+chx)^{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{(1+chx)^3} + c$$

مثال:

$$\int \frac{dx}{e^{-x}+1} = \int \frac{e^x}{e^x+1}dx = ln|e^x+1| + c = l\,n(e^x+1) + c$$

مثال:

$$\int e^{2chx}shx\, dx = \frac{1}{2}\int 2shxe^{2chx}\, dx = \frac{1}{2}e^{2chx} + c$$