المحاضرة الأولى
(نظري)

المحتوى العلمي للمحاضرة يتضمن مايلي:

- **التوابع المثلثية الشهيرة.**
- **التوابع العكسية للتوابع المثلثية الشهيرة.**
- **التوابع القطعية الشهيرة.**
- **التوابع العكسية للتوابع القطعية الشهيرة.**
- **تذكره ببعض مشتقات التوابع.**

1. التوابع المثلثية الشهيرة

$$\sin x:\mathbb{R} \to [-1,1] \longleftarrow$$ تابع فردي

$$\cos x:\mathbb{R} \to [-1,1] \longleftarrow$$ تابع زوجي

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}:\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k; k\in\mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R} \longleftarrow$$ تابع فردي

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}:\mathbb{R}\setminus\{\pi k; k\in\mathbb{Z}\} \to \mathbb{R} \longleftarrow$$ تابع فردي

نذكر ببعض العلاقات الشهيرة:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin(-x) = -\sin x \ , \ \cos(-x) = \cos x$$

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x \ , \qquad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

2. التوابع العكسية للتوابع المثلثية الشهيرة

- التابع $\sin x$ وحيد التعيين على المجال $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ فله دالة عكسية هي $\arcsin(x)$

$$\arcsin(x):[-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \longleftarrow$$ تابع فردي

$$\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4} \quad , \quad \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

- التابع $\cos x$ وحيد التعيين على المجال $[0,\pi]$ فله دالة عكسية هي $\arccos(x)$

$$\arccos(x):[-1,1] \to [0,\pi]$$

$$\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3\pi}{4}, \qquad \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}, \qquad \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

- التابع $\tan x$ وحيد التعيين على المجال $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ فله دالة عكسية هي $\arctan(x)$

$$\arctan(x):\mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$$

$$\arctan(1) = \frac{\pi}{4}, \qquad \arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$$

- التابع $\cot x$ وحيد التعيين على المجال $]0,\pi[$ فله دالة عكسية هي $\operatorname{arccot}(x)$

$$arccot(x): \mathbb{R} \to]0,\pi[$$

$$arccot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{3}, \qquad arccot(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{6}$$

3. التوابع القطعية الشهيرة

$$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$ ← تابع فردي

$$chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}: \mathbb{R} \to [1,\infty[$$ ← تابع زوجي

$$thx = \frac{\text{shx}}{chx} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}: \mathbb{R} \to]-1,1[$$ ← تابع فردي

$$cthx = \frac{chx}{\text{shx}} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}: \mathbb{R}\backslash\{0\} \to]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$$ ← تابع فردي

نذّكر ببعض العلاقات الشهيرة:

$$ch^2x - sh^2x = 1$$

$$chx + shx = e^x \quad , \qquad chx - shx = e^{-x}$$

$$sh(-x) = -shx \quad , \quad \text{ch}(-\text{x}) = \text{chx}$$

$$sh2x = 2shxchx, \qquad ch2x = ch^2x + sh^2x = 2ch^2x - 1 = 1 + 2sh^2x$$

$$sh^2x = \frac{ch2x - 1}{2}, \quad ch^2x = \frac{ch2x + 1}{2}$$

$$1 - th^2x = \frac{1}{ch^2x}$$

$$1 - cth^2x = -\frac{1}{sh^2x}$$

4. التوابع العكسية للتوابع القطعية الشهيرة

- التابع shx له دالة عكسية هي $argsh(x)$

$$argsh(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$ ← تابع فردي

$$argsh(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

- التابع chx له دالة عكسية هي $argch(x)$

$$argch(x): [1,\infty[\to [0,\infty[$$

$$argch(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$$

- التابع thx له دالة عكسية هي $argth(x)$

$$argth(x):]-1,1[\ \to \mathbb{R}$$

$$argth(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

- التابع $cthx$ له دالة عكسية هي $argcth(x)$

$$argcth(x):]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[\ \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

$$argcth(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

نُذّكر الآن ببعض قواعد الاشتقاق لتوابع شهيرة:

المجموعة الأولى

مشتق التابع $\acute{y} = \frac{dy}{dx}$	التابع y
$\acute{y} = a$	$y = ax + b\,; a, b \in \mathbb{R}$
$\acute{y} = nx^{n-1}$	$y = x^n$
$\acute{y} = n(g(x))^{n-1} \times \acute{g}(x)$	$y = (g(x))^n$
$\acute{y} = \acute{g}(x) \times \ln(a) \times a^{g(x)}$	$y = a^{g(x)}; a > 0$
$\acute{y} = \frac{\acute{g}(x)}{g(x)}$	$y = \ln(g(x))$
$\acute{y} = \acute{g}(x)e^{g(x)}$	$y = e^{g(x)}$

مثال:

$$y = 3x + x^7 + 3^{x^2} \Longrightarrow \acute{y} = 3 + 7x^6 + 2xln(3) \times 3^{x^2}$$

مثال:

$$y = \ln\left(\frac{1+x}{x}\right) + e^{2x} \Longrightarrow \acute{y} = -\frac{1}{x(x+1)} + 2e^{2x}$$

المجموعة الثانية

مشتق التابع $\acute{y} = \frac{dy}{dx}$	التابع y
$\acute{y} = \acute{g}(x)\, cos(g(x))$	$y = sin(g(x))$
$\acute{y} = -\acute{g}(x)\, sin(g(x))$	$y = cos(g(x))$
$\acute{y} = \frac{\acute{g}(x)}{cos^2(g(x))}$	$y = tan(g(x))$
$\acute{y} = \frac{-\acute{g}(x)}{sin^2(g(x))}$	$y = cot(g(x))$

مثال:

$$y = tan\left(\frac{1}{x}\right) \Longrightarrow \acute{y} = \frac{-\frac{1}{x^2}}{cos^2\left(\frac{1}{x}\right)} = -\frac{1}{x^2cos^2\left(\frac{1}{x}\right)}$$

مثال:

$$y = sin(x^2 + x) \Longrightarrow \acute{y} = (2x+1)cos(x^2 + x)$$

المجموعة الثالثة

مشتق التابع $\acute{y} = \frac{dy}{dx}$	التابع y
$\acute{y} = \frac{\acute{g}(x)}{\sqrt{1-(g(x))^2}}$	$y = arcsin(g(x))$
$\acute{y} = \frac{-\acute{g}(x)}{\sqrt{1-(g(x))^2}}$	$y = arccos(g(x))$
$\acute{y} = \frac{\acute{g}(x)}{1+(g(x))^2}$	$y = arctan(g(x))$
$\acute{y} = \frac{-\acute{g}(x)}{1+(g(x))^2}$	$y = arccot(g(x))$

مثال:

$$y = arctan(x^2+2x+1) \Longrightarrow \acute{y} = \frac{2x+2}{1+(x+1)^4}$$

المجموعة الرابعة

مشتق التابع $\acute{y} = \frac{dy}{dx}$	التابع y
$\acute{y} = \acute{g}(x)\, ch(g(x))$	$y = sh(g(x))$
$\acute{y} = \acute{g}(x)\, sh(g(x))$	$y = ch(g(x))$
$\acute{y} = \frac{\acute{g}(x)}{ch^2(g(x))}$	$y = th(g(x))$
$\acute{y} = \frac{-\acute{g}(x)}{sh^2(g(x))}$	$y = cth(g(x))$

مثال:

$$y = cth(e^x+5x) \Longrightarrow \acute{y} = \frac{-(e^x+5)}{sh^2(e^x+5x)}$$

المجموعة الخامسة

مشتق التابع $\acute{y} = \frac{dy}{dx}$	التابع y
$\acute{y} = \frac{\acute{g}(x)}{\sqrt{(g(x))^2+1}}$	$y = argsh(g(x))$
$\acute{y} = \frac{\acute{g}(x)}{\sqrt{(g(x))^2-1}}$	$y = argch(g(x))$
$\acute{y} = \frac{\acute{g}(x)}{1-(g(x))^2};\ g(x) \in]-1,1[$	$y = argth(g(x))$
$\acute{y} = \frac{\acute{g}(x)}{1-(g(x))^2};\ g(x) \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$	$y = argcth(g(x))$

مثال:

$$y = e^{argsh(x)} \Longrightarrow \acute{y} = \frac{e^{argsh(x)}}{\sqrt{x^2+1}}$$