

الدكتور:

المحاضرة:

المادة: نظرية



التاريخ: / /

القسم: الرياضيات

السنة: الأولى

المادة: تحليل رياضي

A to Z Library for university services

تكامل الدوال الأسية: لتكامل التكامل $I = \int f(x) dx$

نفرض $t = e^x$

$$dt = e^x dx \rightarrow dx = \frac{dt}{t}$$

$$I = \int \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx$$

$$dx = \frac{dt}{t}$$

نفرض $t = e^x$

$$= \int \frac{dt}{1+t^2} = \arctan(t) + c$$

$$I = \int \frac{dx}{(1+e^x)^2}$$

$$dx = \frac{dt}{t}$$

نفرض $t = e^x$

$$I = \int \frac{dt}{t(1+t)^2}$$



$$\frac{1}{t(1+t)^2} = \frac{A}{t} + \frac{B}{(1+t)^2} + \frac{C}{(1+t)}$$

نوجد الثوابت:

نضرب الطرفين بـ t ونفرض $t=0$ $\Rightarrow$

$$1 = A$$

نضرب طرفي العلاقة بـ $(1+t)^2$ ونفرض $t=-1$ $\Rightarrow$

$$\frac{1}{t} = \frac{A(1+t)^2}{t} + B + C(1+t)$$

$$-1 = 0 + B + 0 \Rightarrow \boxed{B = -1}$$

نضرب طرفي العلاقة بـ t ونفرض $t \rightarrow \infty$ $\Rightarrow$

$$0 = A + C \Rightarrow \boxed{C = -1}$$

$$I = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{(1+t)^2} - \frac{1}{1+t} \right) dt$$

$$= \ln|t| + \frac{1}{1+t} - \ln|t+1| + C$$

نفرض $t = e^x$ $\Rightarrow$

$$= \ln|e^x| + \frac{1}{1+e^x} - \ln(1+e^x) + C$$

$$= \ln x + \frac{1}{1+e^x} - \ln(1+e^x) + C$$

$$I = \int \frac{1 + e^{\frac{x}{2}}}{(1 + e^{xy})^2} dx$$

مثال

$$dx = \frac{dt}{t}$$

الحل: نفرض $t = e^x$

$$= \int \frac{1+t^{\frac{1}{2}}}{(1+t^{\frac{1}{4}})^2} \times \frac{dt}{t} = \int \frac{1+t^{\frac{1}{2}}}{t(1+t^{\frac{1}{4}})^2} dt$$

نفرض $t = s^4$ $\Delta t = 4s^3 \Delta s$ $\Delta t = 4s^3 ds$
 $t = s^4 \Rightarrow dt = 4s^3 ds$

$$= \int \frac{1+s^2}{s^4(1+s^2)^2} \times 4s^3 ds = \int \frac{4(1+s^2)}{s(1+s^2)^2} ds =$$

$$\frac{A}{s} + \frac{B}{(1+s^2)} + \frac{C}{1+s}$$

نضرب طرفي العلاقة بـ s ونعوض $s=0$ نجد:

$$4 = A + 0 + 0 \Rightarrow \boxed{A=4}$$

نضرب طرفي العلاقة بـ $(1+s^2)$ ونعوض طرفي العلاقة

$$\boxed{B=-8}$$

الناجية $s=1$

نضرب طرفي العلاقة بـ s ونعوض $s \rightarrow \infty$

$$4 = A + C \Rightarrow C=0$$

$$I = \int \left(\frac{4}{s} - \frac{8}{(1+s^2)} \right) ds = 4 \ln|s| + \frac{8}{1+s} + C$$

$$= 4 \ln |^4\sqrt{t}| + \frac{8}{1+^4\sqrt{t}} + C = x + \frac{8}{1+^4\sqrt{e^x}} + C$$

هذا هو التكامل - الحالة الأولى

$$I = \int (f(x), \sqrt{a^2 - x^2}) dx \quad (1)$$

نفرض $a = \sin t$

$$x = a \cos t \quad \text{فرض} \quad I = \int (f(x), \sqrt{x^2 - a^2}) dx \quad (2)$$

$$x = a \sinh t \quad \text{فرض} \quad I = \int (f(x), \sqrt{x^2 + a^2}) dx \quad (3)$$

مثال

$$I = \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx$$

نفرض $x = \sin t$ ، $dx = \cos t dt$

$$I = \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx = \int \frac{\sqrt{\cos^2 t}}{\sin^2 t} \cos t dt = \int \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} dt$$

$$= \int \frac{1 - \sin^2 t}{\sin^2 t} dt = \int \left(\frac{1}{\sin^2 t} - 1 \right) dt = -\cot t - t + C$$

نوجد t من المعادلة التالية

$$t = \arcsin(x)$$

$$= -\cot(\arcsin(x)) - \arcsin(x) + C$$

$$\cot(t) = \frac{\cos t}{\sin t} = \frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$= + \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin(x) + C$$

$$I = \int \sqrt{1-x^2} dx$$

مثال

نفرض $x = \sin t$ ، $dx = \cos t dt$

$$I = \int \sqrt{\cos^2 t} \cdot \cos t dt = \int \cos^2 t dt = \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt$$



$$= \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sin(2t) + C$$

$$t = \arcsin(x) \Rightarrow = \frac{1}{2} \arcsin(x) + \frac{1}{4} \sin(2 \arcsin(x)) + C$$

$$I = \int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2} dx$$

$$x = 3 \sin t \Rightarrow dx = 3 \cos t dt$$

$$I = \int \frac{3 \sqrt{1-\sin^2 t} \times 3 \cos t dt}{9 \sin^2 t}$$

$$= \int \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} = \int \left(\frac{1}{\sin^2 t} - 1 \right) = -\cot t - t + C$$

$$t = \arcsin\left(\frac{x}{3}\right) \text{ لذا } = -\cot(\arcsin(\frac{x}{3})) - \arcsin(\frac{x}{3}) + C$$

$$I = \int \sqrt{1+x^2} dx$$

$$x = \sinh(t) \Rightarrow dx = \cosh t dt$$

$$= \int \sqrt{1+\sinh^2 t} \cosh t dt$$

$$= \int \cosh^2 t dt = \int \frac{\cosh 2t + 1}{2} dt$$

$$= \frac{1}{4} \sinh 2t + \frac{1}{2} t + C$$



$$= \frac{1}{4} \operatorname{sh}(2 \operatorname{arsh} x) + \frac{1}{2} \operatorname{arsh} x + c$$

مثال ٥

$$I = \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+x^2}}$$

$$dx = \operatorname{ch} t dt \quad \Leftarrow \quad x = \operatorname{sh} t \quad \text{نفرض}$$

$$I = \int \frac{dt}{\operatorname{sh}^2 t} = -\operatorname{ch} t + c = -\frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{sh} t} + c$$

$$= -\frac{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t}}{\operatorname{sh} t} = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + c$$

مثال ٦

$$I = \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2-9}}$$

$$dx = 3 \operatorname{sh} t dt \quad \Leftarrow \quad x = 3 \operatorname{ch} t \quad \text{نفرض}$$

نفرض

$$I = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{\operatorname{ch} t}$$

$$du = \operatorname{ch} t dt \quad \Leftarrow \quad u = \operatorname{sh} t \quad \text{نفرض}$$

$$I = \frac{1}{3} \int \frac{du}{\operatorname{ch}^2 t}$$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{3} \arctan(u) + c = \frac{1}{3} \arctan(\operatorname{sh} t) + c$$

$$\operatorname{sh} t = \sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1} = \sqrt{\frac{x^2}{9} - 1} = \frac{\sqrt{x^2-9}}{3}$$

$$I = \frac{1}{3} \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2-9}}{3}\right) + c$$