تكامله الدوال المثلثية:

$$I = \int f(\sin x, \cos x)\,dx$$

يوجد طريقة عامة لإيجاد هذا التكامله وهي بالشكل التالي

1) نجري تغيير أي نجعل المتحول $T = \tan\frac{x}{2}$

2) نعبر عن $\sin x$ و $\cos x$ بدلالة T.

3) نعبر عن dx بدلالة t و dt.

توضيح:

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$$

$$= 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2}{\frac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}\times\sin\frac{x}{2}}} = \frac{2}{\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} + \frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}}$$

$$= \frac{2}{\tan x + \frac{1}{\tan x}} = \frac{2}{T+\frac{1}{T}} = \frac{2T}{1+T^2}$$

$$\sin x = \frac{2T}{1+T^2}$$

$$\tan^2\frac{x}{2} = \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{\frac{1-\cos x}{2}}{\frac{1+\cos x}{2}} = \frac{1-\cos x}{1+\cos x} \Rightarrow T^2 = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

$$(1+\cos x)T^2 = 1-\cos x$$

$$\cos x(T^2+1) = 1-T^2 \Rightarrow \cos x = \frac{1-T^2}{1+T^2}$$

TEL:0931497960 - (كلية العلوم (جامعة طرطوس) - مكتبة A to Z

$T = \tan\frac{x}{2} \longrightarrow dx = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\, dt$

$= \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)dx \longrightarrow dt = \frac{1}{2}(1+t^2)\,dx \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

مثال:

$$I = \int \frac{dx}{\cos x + \sin x + 3}$$

نفرض أن $T = \tan\frac{x}{2}$ ، $\cos x = \frac{1-T^2}{1+T^2}$ ، $\sin x = \frac{2T}{1+T^2}$

نعوض في المثال:

$$I = \int \frac{dT}{T^2+2T+2} = \int \frac{dT}{(T+1)^2+1}$$

نعوض $T+1 = u$

$$I = \int \frac{dT}{u^2+1} = \arctan(u) + c$$

$$= \arctan(T+1) + c = \arctan\left(\tan\frac{x}{2}+1\right) + c$$

مثال:

$$I = \int \frac{dx}{\sin x}$$

نفرض $T = \tan\frac{x}{2}$

$\sin x = \frac{2T}{1+T^2}$ ، $dx = \frac{2dT}{1+T^2}$

نعوض في I نجد:

$$I = \int \frac{1}{T}\, dT = \ln|T| + c = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c$$

مثال:

$$I = \int \frac{dx}{\cos x}$$

نفرض $T = \tan\frac{x}{2}$ ، $\cos x = \frac{1-T^2}{1+T^2}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

بالتعويض في I نجد:

$$I=\int\frac{2dT}{1-T^2}=2\int\frac{dT}{1-T^2}=2\times\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+T}{1-T}\right|+C$$

$$=\ln\left|\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right|+C=\ln\left|\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{x}{2}}\right|+C$$

$$=\ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|+C$$

ملاحظة:

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C \quad ,\quad \int\frac{dx}{\cos x}=\ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|+C$$

ملاحظة 2: التحويل $T=\tan\frac{x}{2}$ يصح دائماً بكلا تكاملات النمط $I=\int f(\sin x,\cos x)dx$ إلا أنه لا يستخدم دائماً لأنه يقود غالباً إلى تكاملات الدالة العكسية. نلاحظ بأن تحويل $T=\tan\frac{x}{2}$ يستخدم من أجل كامل التكاملات من النمط $\int\frac{dx}{a\cos x+b\sin x+c}$

ملاحظة 3: في الكثير من الحالات نستخدم أحد التعويضات الأكثر ملائمة لكامل التكامل $I=\int f(\sin x,\cos x)dx$

① نفرض $T=\cos x$ فـ $f(-\sin x,\cos x)=-f(\sin x,\cos x)$

نفرض $T=\sin x$ و $f(\sin x,-\cos x)=-f(\sin x,\cos x)$

نفرض $T=\tan x$ و $f(-\sin x,-\cos x)=f(\sin x,\cos x)$

② نفرض $T=\cos x$

مثال: أوجد التكامل $I=\int\frac{\sin x}{4+\cos^2 x}dx$

$f(\sin x,\cos x)=\frac{\sin x}{4+\cos^2 x}$

$f(-\sin x,\cos x)=-f(\sin x,\cos x)$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نفرض $T=\cos x$ $\Longrightarrow$ $dT=-\sin x\,dx$

$$= \int \frac{-dT}{1+T^2} = -\frac{1}{2}\arctan\frac{T}{2}+C = -\frac{1}{2}\arctan\frac{\cos x}{2}+C$$

مثال:

$$I=\int \frac{\sin^3 x+2\sin x}{1+\cos x}\,dx$$

$$f(\sin x,\cos x)=\frac{\sin^3 x+2\sin x}{1+\cos x}$$

$$f(-\sin x,\cos x)=-f(\sin x,\cos x)$$

نفرض $T=\cos x$ $\Longrightarrow$ $dT=-\sin x$

$$\sin^2 x=1-\cos^2 x=1-T^2$$

$$= \int \frac{T^2-3}{T+1} = \int \frac{T^2-1-2}{T+1} = \int \frac{(T-1)(T+1)-2}{T+1}\,dT$$

$$= \int \left(T-1-\frac{2}{T+1}\right)dT = \frac{T^2}{2}-T-2\ln|T+1|+C$$

$$= \frac{\cos^2 x}{2}-\cos x-2\ln|\cos x+1|+C$$

مثال:

$$I=\int \frac{\cos x}{1+\sin x+\sin^2 x}\,dx$$

نفرض $T=\sin x$

$$dT=\cos x$$

$$I=\int \frac{dT}{T^2+T+1} = \int \frac{dT}{\left(T+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{(2(T+1))}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2T+1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2\sin x + 1}{\sqrt{3}}\right) + C$

مثال:

$I = \int \frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}\, dx$

$f(\sin x, \cos x) = \frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}$

$f(-\sin x, -\cos x) = f(\sin x, \cos x)$

نفرض $T = \tan x$

$dT = \frac{1}{\cos^2 x}\, dx \longrightarrow dT = (1+\tan^2 x)\, dx$

$dt = (1+T^2)\, dx \longrightarrow dx = \frac{dT}{1+T^2}$

$* \quad 1+\cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \longrightarrow 1+\frac{1}{T^2} = \frac{1}{\sin^2 x}$

$\sin^2 x = \frac{T^2}{1+T^2} \longrightarrow 1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{1+T^2}$

نعوّض في التكامل المعطى فيصبح:

$I = \int \frac{T^2}{(T^2+1)(T^2+2)}\, dt = \int \left(\frac{-1}{T^2+1} + \frac{2}{2+T^2}\right) dt$

$= -\arctan T + \sqrt{2} \arctan \frac{T}{\sqrt{2}} + C$

$= -x + \sqrt{2} \arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right) + C$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

دراسة التكاملات من النمط

$\int \cos(\alpha x)\cos(\beta x)\,dx$

$\int \sin(\alpha x)\sin(\beta x)\,dx$

$\int \sin(\alpha x)\cos(\beta x)\,dx$

حيث α, β عددين حقيقيين غير معدومين.

يتم هذا النوع من التكاملات بتجزئة الدالة المكاملة لمجموع بالتين وفق العلاقات الآتية:

$\cos(\alpha x)\cos(\beta x) = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)x + \cos(\alpha+\beta)x\right]$

$\sin(\alpha x)\sin(\beta x) = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)x - \cos(\alpha+\beta)x\right]$

$\sin\alpha x\cos\beta x = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta)x + \sin(\alpha+\beta)x\right]$

مثال:

$I = \int \sin 5x \cos 3x\,dx$

$= \int \frac{1}{2}\left[\sin 2x + \sin 8x\right]dx = -\frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{16}\cos 8x + c$

$I = \int \sin 3x \sin x\,dx = \int \frac{1}{2}\left[\cos 2x - \cos 4x\right] = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{8}\cos 4x + c$

دراسة التكاملات من النمط:

$I = \int \sin^m x \cos^n x\,dx$

① إذا كان n أو m أو كلاهما فرديا عندئذ نخرج جميع القوى الفردية عاملا واحدا ونعبر عنها بقية في الدالة المكاملة باستخدام العلاقة المثبتة $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

5- إذا كانت m, n أعداد زوجية موجبة عندئذٍ نستخدم العلاقات المثلثية التالية:

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \quad , \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\frac{1}{2}\sin 2x = \sin x \cos x$$

مثال:

$$I = \int \sin^3 x \cos^2 x \, dx = \int \sin^2 x \sin x \cos^2 x \, dx$$

$$= \int (1-\cos^2 x) \sin x \cos^2 x \, dx$$

$$= \int \sin x \cos^2 x \, dx - \int \sin x \cos^4 x \, dx$$

$$= -\int (-\sin x) \cos^2 x \, dx + \int (-\sin x) \cos^4 x \, dx$$

$$= -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + C$$

مثال:

$$I = \int \sin^4 x \cos^3 x \, dx = \int \sin^4 x \cos^2 x \cos x \, dx$$

$$= \int \cos x \sin^4 x (1-\sin^2 x) dx = \int \cos x \sin^4 x \, dx - \int \cos x \sin^6 x \, dx$$

$$= \frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{1}{7}\sin^7 x + C$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال 5:

$$I = \int \sin^2 x \cos^2 x \, dx = \int (\sin x \cos x)^2 \, dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 dx = \int \frac{1}{2}\sin^2 2x \, dx = \int \frac{1}{4}\left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right) dx$$

$$= \int \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 4x = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C$$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة