المحاضرة الحادية عشرة (نظري)

المحتوى العلمي للمحاضرة يتضمن مايلي:

- **دراسة بعض التكاملات التدريجية.**
- **بعض الأمثلة المتعلقة بهذه التكاملات.**

دراسة بعض التكاملات التدريجية

1) لحلّ التكامل $I_m = \int cos^m x\, dx$ حيث m عدد طبيعي غير معدوم، نُطبق القانون

$$\boldsymbol{I_m = \int cos^m x\, dx = \frac{sinxcos^{m-1}x}{m} + \left(\frac{m-1}{m}\right) I_{m-2}}$$

حيث

$$I_1 = \int cosxdx = sinx + c$$

استنتاج القانون:

$$I_m = \int cos^m x\, dx = \int cos^{m-1}x\, cosxdx$$

نكامل بالتجزئة:

$$u = cos^{m-1}x, \quad du = -(m-1)sinxcos^{m-2}xdx$$
$$dv = cosxdx, \quad v = sinx$$

$$I_m = sinxcos^{m-1}x - \int -(m-1)cos^{m-2}xsin^2xdx$$
$$= sinxcos^{m-1}x + (m-1)\int cos^{m-2}x(1-cos^2x)dx$$
$$= sinxcos^{m-1}x + (m-1)\int cos^{m-2}xdx - (m-1)\int cos^m xdx$$
$$= sinxcos^{m-1}x + (m-1)I_{m-2} - (m-1)I_m$$

بالتالي:

$$mI_m = sinxcos^{m-1}x + (m-1)I_{m-2}$$

عندئذٍ

$$I_m = \int cos^m x\, dx = \frac{sinxcos^{m-1}x}{m} + \left(\frac{m-1}{m}\right) I_{m-2}$$

وهو المطلوب.

مثال1: أنجز التكامل

$$I_5 = \int cos^5 xdx$$

الحلّ: نلاحظ $m = 5$

$$I_5 = \int cos^5 x\, dx = \frac{sinxcos^4x}{5} + \frac{4}{5}I_3$$

لنوجد I_3 :

$$I_3 = \int cos^3 xdx = \frac{sinxcos^2x}{3} + \frac{2}{3}I_1$$

لنوجد I_1:

$$I_1 = \int cosxdx = sinx + c_1$$

بالتالي:

$$I_3 = \frac{sinxcos^2x}{3} + \frac{2}{3}sinx + \frac{2}{3}c_1$$
$$I_5 = \frac{sinxcos^4x}{5} + \frac{4sinxcos^2x}{15} + \frac{8}{15}sinx + c$$

2) لحلّ التكامل $I_m = \int sin^m x\,dx$ حيث m عدد طبيعي غير معدوم، نطبق القانون

$$I_m = \int sin^m x dx = -\frac{cosxsin^{m-1}x}{m} + \left(\frac{m-1}{m}\right) I_{m-2}$$

حيث

$$I_1 = \int sinxdx = -cosx + c$$

مثال2: أنجز التكامل

$$I_3 = \int sin^3 x\,dx$$

الحلّ:

$$I_3 = \int sin^3 x\,dx = \frac{-cosxsin^2 x}{3} + \frac{2}{3} I_1$$

لنوجد I_1:

$$I_1 = \int sinxdx = -cosx + c_1$$

بالتالي:

$$I_3 = \frac{-cosxsin^2 x}{3} - \frac{2}{3} cosx + c$$

3) لحلّ التكامل $I_m = \int x^m e^{\alpha x} dx$ حيث m عدد طبيعي، نُطبق القانون

$$I_m = \int x^m e^{\alpha x} dx = \frac{x^m e^{\alpha x}}{\alpha} - \frac{m}{\alpha} I_{m-1}$$

حيث

$$I_0 = \int e^{\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} + c$$

مثال3: أنجز التكامل

$$I_3 = \int x^3 e^{2x} dx$$

الحلّ:

$$I_3 = \int x^3 e^{2x} dx = \frac{x^3 e^{2x}}{2} - \frac{3}{2} I_2$$

$$I_2 = \frac{x^2 e^{2x}}{2} - \frac{2}{2} I_1 = \frac{x^2 e^{2x}}{2} - I_1$$

$$I_1 = \int xe^{2x} dx = \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{1}{2} I_0 = \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\int e^{2x} dx = \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{1}{4} e^{2x} + c_1$$

بالتالي

$$I_2 = \frac{x^2 e^{2x}}{2} - \frac{xe^{2x}}{2} + \frac{1}{4} e^{2x} - c_1$$

$$I_3 = \frac{x^3 e^{2x}}{2} - \frac{3}{4} x^2 e^{2x} + \frac{3}{4} xe^{2x} - \frac{3}{8} e^{2x} + c = \left(\frac{x^3}{2} - \frac{3}{4} x^2 + \frac{3}{4} x - \frac{3}{8}\right) e^{2x} + c$$

مكتبة A to Z