10

# المحاضرة العاشرة
# (نظري)

**المحتوى العلمي للمحاضرة يتضمن مايلي:**

- **تكامل الدوال الأسية**
- **دراسة بعض التكاملات الخاصة**

# تكامل الدوال الأسية

لدراسة التكامل $I=\int f(e^x)dx$، نفرض $t=e^x$ بالتالي $dt=e^xdx=tdx$ عندئذ $dx=\frac{dt}{t}$

**مثال1**: أنجز التكامل

$$I=\int\frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$$

**الحلّ**: نفرض $t=e^x$ بالتالي $dt=e^xdx=tdx$ عندئذ $dx=\frac{dt}{t}$ عندئذ

$$I=\int\frac{e^x}{1+e^{2x}}dx=\int\frac{dt}{1+t^2}=arctan(t)+c=arctan(e^x)+c$$

**مثال2**: أنجز التكامل

$$I=\int\frac{dx}{(1+e^x)^2}$$

**الحلّ**: نفرض $t=e^x$ بالتالي $dt=e^xdx=tdx$ عندئذ $dx=\frac{dt}{t}$ عندئذ

$$I=\int\frac{dx}{(1+e^x)^2}=\int\frac{dt}{t(1+t)^2}$$

$$\frac{1}{t(1+t)^2}=\frac{A}{t}+\frac{\mathrm{B}}{(1+t)^2}+\frac{\mathrm{C}}{(1+t)}\dots(*)$$

- لتعيين A : نضرب طرفي العلاقة $(*)$ بـ $t$ ثم نعوض في العلاقة الناتجة $t=0$ نجد $\mathrm{A}=1$
- لتعيين B : نضرب طرفي العلاقة $(*)$ بـ $(1+t)^2$ ثم نعوض $t=-1$ في العلاقة الناتجة نجد: $B=-1$
- نضرب طرفي العلاقة $(*)$ بـ $t$ ونجعل $t\longrightarrow\infty$ نجد $A+C=0$ ومنه $C=-1$

وبالتالي:

$$I=\int\frac{dt}{t(1+t)^2}=\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{(1+t)^2}-\frac{1}{1+t}\right)dt=ln|t|+\frac{1}{1+t}-ln|1+t|+c$$

$$=ln|e^x|+\frac{1}{1+e^x}-ln|1+e^x|+c=x+\frac{1}{1+e^x}-ln(1+e^x)+c$$

**مثال3**: أنجز التكامل

$$I=\int\frac{\left(1+e^{\frac{x}{2}}\right)}{\left(1+e^{\frac{x}{4}}\right)^2}dx$$

**الحلّ**: نفرض $t=e^x$ بالتالي $dt=e^xdx=tdx$ عندئذ $dx=\frac{dt}{t}$ عندئذ

$$I=\int\frac{\left(1+e^{\frac{x}{2}}\right)}{\left(1+e^{\frac{x}{4}}\right)^2}dx=\int\frac{\left(1+t^{\frac{1}{2}}\right)}{t\left(1+t^{\frac{1}{4}}\right)^2}dt$$

نفرض $t=s^4$ بالتالي $dt=4s^3ds$

$$I=\int\frac{\left(1+e^{\frac{x}{2}}\right)}{\left(1+e^{\frac{x}{4}}\right)^2}dx=\int\frac{\left(1+t^{\frac{1}{2}}\right)}{t\left(1+t^{\frac{1}{4}}\right)^2}dt=\int\frac{(1+s^2)}{s^4(1+s)^2}4s^3\,ds=\int\frac{4s^2+4}{s(1+s)^2}ds$$

$$\frac{4s^2+4}{s(1+s)^2}=\frac{A}{s}+\frac{B}{(1+s)^2}+\frac{C}{(s+1)}\dots(*)$$

- لتعيين A : نضرب طرفي العلاقة $(*)$ بـ $s$ ثم نعوض في العلاقة الناتجة $s=0$ نجد $A=4$
- لتعيين B : نضرب طرفي العلاقة $(*)$ بـ $(1+s)^2$ ثم نعوض $s=-1$ في العلاقة الناتجة نجد $B=-8$
- نضرب طرفي العلاقة $(*)$ بـ $s$ ونجعل $s\longrightarrow\infty$ نجد $C=0$

وبالتالي:

$$I=\int\frac{4s^2+4}{s(1+s)^2}ds=\int\left(\frac{4}{s}-\frac{8}{(1+s)^2}\right)ds=4ln|s|+\frac{8}{1+s}+c=4ln\left|\sqrt[4]{t}\right|+\frac{8}{1+\sqrt[4]{t}}+c$$
$$=4ln\left|e^{\frac{x}{4}}\right|+\frac{8}{1+e^{\frac{x}{4}}}+c=x+\frac{8}{1+e^{\frac{x}{4}}}+c$$

دراسة بعض التكاملات الخاصة

1. $I=\int f\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$ حيث نفرض $x=asin(t)$
2. $I=\int f\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$ حيث نفرض $x=ach(t)$
3. $I=\int f\left(x,\sqrt{x^2+a^2}\right)dx$ حيث نفرض $x=ash(t)$

**مثال4:** أنجز التكامل

$$I=\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$$

**الحلّ:** نضع $x=sin(t)$ بالتالي $dx=cos(t)dt$

$$I=\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx=\int\frac{\sqrt{cos^2(t)}}{sin^2(t)}cos(t)dt=\int\frac{cos^2(t)}{sin^2(t)}dt=\int\left(\frac{1}{sin^2(t)}-1\right)dt$$
$$=-cot(t)-t+c$$

نلاحظ بأنّ:

$$cot(t)=\frac{cost}{sint}=\frac{\sqrt{1-sin^2(t)}}{sint}=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

بالتالي

$$I=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}-arcsin(x)+c$$

**مثال5:** أنجز التكامل

$$I=\int\sqrt{1-x^2}dx$$

**الحلّ:** نضع $x=sin(t)$ بالتالي $dx=cos(t)dt$

$$I=\int\sqrt{1-x^2}dx=\int\sqrt{cos^2(t)}cos(t)dt=\int cos^2(t)dt=\int\left(\frac{1+cos2t}{2}\right)dt$$
$$=\int\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}cos2t\right)dt=\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}sin2t+c$$
$$=\frac{1}{2}arcsin(x)+\frac{1}{4}sin\big(2arcsin(x)\big)+c$$

**مثال6:** أنجز التكامل $I=\int\frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx$

**الحلّ:** نفرض $x=3\,sin(t)$ فيكون $dx=3\cos t\;dt$

$$I=\int\frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx=\int\frac{\sqrt{9-9(\sin t)^2}\,(3\cos t)}{9\,(\sin t)^2}\,dt=\int\frac{9(\cos t)^2}{9(\sin t)^2}dt$$
$$=\int(\cot t)^2dt=\int((\cot t)^2+1-1)dt=\int\left(\frac{1}{\sin^2 t}-1\right)dt$$
$$=-\cot t-t+c=-\cot\left(\arcsin\frac{x}{3}\right)-\left(\arcsin\frac{x}{3}\right)+c$$

**مثال7:** أنجز التكامل

$$I=\int\sqrt{1+x^2}dx$$

الحلّ: نضع $x=sh(t)$ بالتالي $dx=ch(t)dt$

$$I=\int\sqrt{1+x^2}dx=\int\sqrt{ch^2(t)}ch(t)dt=\int ch^2(t)dt=\int\left(\frac{ch2t+1}{2}\right)dt$$
$$=\frac{1}{4}sh(2t)+\frac{1}{2}t+c=\frac{1}{4}sh\big(2(argshx)\big)+\frac{1}{2}argshx+c$$

**مثال8:** أنجز التكامل

$$I=\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$$

**الحلّ:** نضع $x=sh(t)$ بالتالي $dx=ch(t)dt$

$$I=\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}=\int\frac{dt}{sh^2t}=-ctht+c=-\frac{cht}{sht}+c=-\frac{\sqrt{1+sh^2t}}{sht}+c=-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+c$$

**مثال9:** أنجز التكامل

$$I=\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}}$$

**الحلّ:** نضع $x=3ch(t)$ بالتالي $dx=3sh(t)dt$

$$I=\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}}=\frac{1}{3}\int\frac{1}{cht}dt=\frac{1}{3}\int\frac{cht}{ch^2t}dt=\frac{1}{3}\int\frac{cht}{1+sh^2t}dt$$

نضع $sh(t)=u$ بالتالي $du=chtdt$

$$I=\frac{1}{3}\int\frac{du}{1+u^2}=\frac{1}{3}arctan(u)+c=\frac{1}{3}arctan\big(sh(t)\big)+c$$

بما أنّ

$$sh(t)=\sqrt{ch^2t-1}=\sqrt{\frac{x^2}{9}-1}=\frac{\sqrt{x^2-9}}{3}$$

بالتالي

$$I=\frac{1}{3}arctan\left(\frac{\sqrt{x^2-9}}{3}\right)+c$$

-----------