المحاضرة التاسعة
(نظري)

المحتوى العلمي للمحاضرة يتضمن مايلي:

- **تكامل الدوال القطعية باستخدام الطريقة العامة.**
- **تكامل الدوال القطعية باستخدام بعض الطرق الخاصة.**
- **العديد من الأمثله المتعلقة بهذه التكاملات.**

تكامل الدوال القطعية

لدراسة التكامل $I = \int f(shx, chx)dx$، هناك طريقه عامة لإيجاد هذا التكامل وهي بالشكل التالي:

1. نجري تغييراً في المتحول $t = th\frac{x}{2}$.
2. نحسب shx و chx بدلالة t.
3. نحسب dx بدلالة t و dt.

توضيح:

▪

$$shx = 2sh\frac{x}{2}ch\frac{x}{2} = \frac{2sh\frac{x}{2}ch\frac{x}{2}}{ch^2\frac{x}{2} - sh^2\frac{x}{2}} = \frac{2}{\frac{ch^2\frac{x}{2} - sh^2\frac{x}{2}}{sh\frac{x}{2}ch\frac{x}{2}}} = \frac{2}{\frac{ch\frac{x}{2}}{sh\frac{x}{2}} - \frac{sh\frac{x}{2}}{ch\frac{x}{2}}} = \frac{2}{cth\frac{x}{2} - th\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{2th\frac{x}{2}}{1 - th^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 - t^2}$$

بالتالي

$$shx = \frac{2t}{1 - t^2}$$

$$chx = ch^2\left(\frac{x}{2}\right) + sh^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{ch^2\left(\frac{x}{2}\right) + sh^2\left(\frac{x}{2}\right)}{ch^2\left(\frac{x}{2}\right) - sh^2\left(\frac{x}{2}\right)} == \frac{1 + th^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - th^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$chx = \frac{1 + t^2}{1 - t^2}$$

▪

$$th\frac{x}{2} = t$$

بالتالي $\frac{x}{2} = argth(t)$

$$x = 2argth(t)$$

عندئذ:

$$dx = \frac{2dt}{1 - t^2}$$

مثال1: أنجز التكامل

$$I = \int \frac{dx}{shx + chx + 1}$$

الحلّ: نفرض $t = th\frac{x}{2}$

$$shx = \frac{2t}{1 - t^2}, \qquad chx = \frac{1 + t^2}{1 - t^2}, \qquad dx = \frac{2dt}{1 - t^2}$$

نعوض نجد:

$$I = \int \frac{dx}{shx + chx + 1} = \int \frac{dt}{t+1} = ln|t+1| + c = ln\left|th\frac{x}{2} + 1\right| + c$$

مثال2: أنجز التكامل

$$I = \int \frac{dx}{chx}$$

الحلّ: نفرض $t = th\frac{x}{2}$

$$chx = \frac{1+t^2}{1-t^2}, \qquad dx = \frac{2dt}{1-t^2}$$

نعوض نجد:

$$I = \int \frac{dx}{chx} = \int \frac{2}{1+t^2}dt = 2arctan(t) + c = 2arctan\left(th\frac{x}{2}\right) + c$$

ملاحظة: التحويل $t = th\frac{x}{2}$ يسمح بحل التكاملات من النمط $\int f(shx, chx)dx$، إلاّ أنه لا يستخدم دائماً لأنه يقود غالباً إلى تكاملات لدوال صعبة.

نلاحظ بأنّ التحويل $t = th\frac{x}{2}$ يُستخدم من أجل حلّ التكاملات من النمط $\int \frac{dx}{achx+bshx+c}$.

ملاحظة: توجد الكثير من الحالات نستخدم من أجلها تحويلات أكثر ملائمة لحلّ التكامل $I = \int f(shx, chx)dx$

1. إذا كان $f(-shx, chx) = -f(shx, chx)$ لذلك نجري التحويل $t = chx$.
2. إذا كان $f(shx, -chx) = -f(shx, chx)$ لذلك نجري التحويل $t = shx$.
3. إذا كان $f(-shx, -chx) = f(shx, chx)$ لذلك نجري التحويل $t = thx$.

مثال3: أنجز التكامل

$$I = \int \frac{shx}{1 + chx + ch^2x}dx$$

الحل: نفرض $t = chx$ عندئذ $dt = shx\, dx$

$$I = \int \frac{shx}{1 + chx + ch^2x}dx = \int \frac{dt}{t^2 + t + 1} = \int \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right) + c$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}}arctan\left(\frac{2chx+1}{\sqrt{3}}\right) + c$$

مثال4: أنجز التكامل

$$I = \int \frac{ch^3x + chx}{1 + shx}dx$$

الحلّ:

$$f(shx, chx) = \frac{ch^3x + chx}{1 + shx}$$
$$f(shx, -chx) = -f(shx, chx)$$

بالتالي نفرض $t = shx$ عندئذ $dt = chx\, dx$

$$I = \int \frac{ch^3x + chx}{1 + shx}dx = \int \frac{(ch^2x + 1)chx}{1 + shx}dx = \int \frac{t^2 + 2}{t + 1}dt = \int \left(t - 1 + \frac{3}{t+1}\right)dt$$
$$= \frac{t^2}{2} - t + 3ln|t+1| + c = \frac{(shx)^2}{2} - shx + 3ln|shx + 1| + c$$

مثال5: أنجز التكامل

$$I = \int ch^3x dx$$

الحلّ: نفرض $t = shx$ عندئذ $dt = chx\, dx$ عندئذ

$$I = \int ch^3xdx = \int ch^2xchxdx = \int (1+sh^2x)chxdx = \int (1+t^2)dt = t + \frac{t^3}{3} + c$$
$$= shx + \frac{sh^3x}{3} + c$$

مثال6: أنجز التكامل

$$I = \int \frac{dx}{sh^2x - 4shxchx + 9ch^2x}$$

الحلّ:

$$f(shx, chx) = \frac{1}{sh^2x - 4shxchx + 9ch^2x}$$
$$f(-shx, -chx) = f(shx, chx)$$

بالتالي نفرض $t = thx$ عندئذ $dt = \frac{1}{ch^2x}dx$

$$dt = (1 - th^2x)\, dx \Longrightarrow\ dx = \frac{dt}{1-t^2}$$

عندئذ

$$1 - th^2x = \frac{1}{ch^2x} \Longrightarrow ch^2x = \frac{1}{1-t^2}$$

$$sh^2x = ch^2x - 1 \Longrightarrow sh^2x = \frac{t^2}{1-t^2}$$

نعوض نجد:

$$I = \int \frac{dx}{sh^2x - 4shxchx + 9ch^2x} = \int \frac{dt}{t^2 - 4t + 9} = \int \frac{dt}{(t-2)^2 + 5}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}} arctan\left(\frac{t-2}{\sqrt{5}}\right) + c = \frac{1}{\sqrt{5}} arctan\left(\frac{thx-2}{\sqrt{5}}\right) + c$$

❖ دراسة التكاملات من النمط

$$\int \boldsymbol{ch(\alpha x)ch(\beta x)dx}$$
$$\int \boldsymbol{sh(\alpha x)sh(\beta x)dx}$$
$$\int \boldsymbol{sh(\alpha x)ch(\beta x)dx}$$

حيث α, β عددين حقيقين غير معدومين.

يحلّ هذا النوع من التكاملات بتجزئة الدالة المكاملة لمجموع دالتين وفق إحدى العلاقات التالية:

$$ch(\alpha x)ch(\beta x) = \frac{1}{2}[ch(\alpha+\beta)x + ch(\alpha-\beta)x]$$
$$sh(\alpha x)sh(\beta x) = \frac{1}{2}[ch(\alpha+\beta)x - ch(\alpha-\beta)x]$$
$$sh(\alpha x)ch(\beta x) = \frac{1}{2}[sh(\alpha+\beta)x + sh(\alpha-\beta)x]$$

مثال7: أنجز التكامل

$$I = \int shxch3xdx$$

الحلّ:

$$\int shxch3xdx = \int \frac{1}{2}[sh4x + sh(-2x)]\, dx = \frac{1}{8}ch4x - \frac{1}{4}ch2x + \text{c}$$

مثال8: أنجز التكامل

$$I = \int chxch3xdx$$

الحلّ:

$$\int chxch3xdx = \int \frac{1}{2}[ch4x + ch(-2x)]\, dx = \int \frac{1}{2}[ch4x + ch(2x)]\, dx$$
$$= \frac{1}{8}sh4x + \frac{1}{4}sh2x + \text{c}$$

❖ **دراسة التكاملات من النمط**

$$I = \int sh^m xch^n xdx$$

1. إذا كان n أو m أو كلاهما فردياً عندئذ نخرج من القوة الفردية مضروباً واحداً ونعبر عما بقي في الدالة المكاملة باستخدام العلاقه الشهيرة $ch^2x - sh^2x = 1$ فنحصل على تكامل شهير.
2. إذا كان كلّ من n و m زوجيان عندئذ نستخدم العلاقات القطعية التالية لتبسيط الدالة المكاملة.

$$sh^2x = \frac{ch2x - 1}{2}, \quad ch^2x = \frac{ch2x + 1}{2}$$
$$\frac{1}{2}sh2x = shxchx$$

مثال9: أنجز التكامل

$$I = \int ch^4xsh^3xdx$$

الحلّ:

$$I = \int ch^4x\text{shx}sh^2xdx = \int ch^4x\text{shx}(ch^2x - 1)dx = \int shxch^6xdx - \int \text{shx}ch^4xdx$$
$$= \frac{1}{7}ch^7x - \frac{1}{5}ch^5x + c$$

مثال10: أنجز التكامل

$$I = \int 2sh^2xch^2xdx$$

الحلّ:

$$I = 2\int sh^2xch^2xdx = 2\int (shxchx)^2dx = 2\int \left(\frac{1}{2}sh2x\right)^2 dx = 2\int \frac{1}{4}sh^2 2xdx$$
$$= \int \frac{1}{2}\left(\frac{ch4x - 1}{2}\right) dx = \int \left(\frac{1}{4}ch4x - \frac{1}{4}\right) dx = \frac{1}{16}sh4x - \frac{1}{4}x + c$$
