8

المحاضرة الثامنة
(نظري)

المحتوى العلمي للمحاضرة يتضمن مايلي:

- **تكامل الدوال المثلثية باستخدام الطريقة العامة.**
- **تكامل الدوال المثلثية باستخدام بعض الطرق الخاصة.**
- **العديد من الأمثله المتعلقة بهذه التكاملات.**

تكامل الدوال المثلثية

لدراسة التكامل $I = \int f(sinx, cosx)dx$، هناك طريقه عامة لإيجاد هذا التكامل وهي بالشكل التالي:

1. نجري تغييراً في المتحول $t = tan\frac{x}{2}$.
2. نحسب $sinx$ و $cosx$ بدلالة t.
3. نحسب dx بدلالة t و dt.

توضيح:

-

$$sinx = 2sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2} = \frac{2sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}}{sin^2\frac{x}{2} + cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2}{\frac{sin^2\frac{x}{2} + cos^2\frac{x}{2}}{sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}}} = \frac{2}{\frac{sin\frac{x}{2}}{cos\frac{x}{2}} + \frac{cos\frac{x}{2}}{sin\frac{x}{2}}}$$

$$= \frac{2}{tan\frac{x}{2} + \frac{1}{tan\frac{x}{2}}} = \frac{2tan\frac{x}{2}}{1 + tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2}$$

بالتالي

$$sinx = \frac{2t}{1 + t^2}$$

-

$$tan^2\frac{x}{2} = \frac{sin^2\frac{x}{2}}{cos^2\frac{x}{2}} = \frac{\frac{1 - cosx}{2}}{\frac{1 + cosx}{2}} = \frac{1 - cosx}{1 + cosx} \Longrightarrow t^2(1 + cosx) = (1 - cosx)$$

$$cosx = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

-

$$t = tan\frac{x}{2}$$

بالتالي

$$dt = \frac{1}{2} \times \frac{1}{cos^2\frac{x}{2}}dx$$

$$dt = \frac{1}{2}\left(1 + tan^2\frac{x}{2}\right)dx = \frac{1}{2}(1 + t^2)dx$$

عندئذ:

$$dx = \frac{2dt}{1 + t^2}$$

مثال1: أنجز التكامل

$$I = \int \frac{dx}{cosx + 2sinx + 3}$$

الحلّ: نفرض $t = tan\frac{x}{2}$

$$sinx = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad cosx = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

نعوض نجد:

$$I = \int \frac{dx}{cosx + 2sinx + 3} = \int \frac{dt}{t^2 + 2t + 2} = \int \frac{dt}{(t+1)^2 + 1} = arctan(t+1) + c$$
$$= arctan\left(tan\frac{x}{2} + 1\right) + c$$

مثال2: أنجز التكامل

$$I = \int \frac{dx}{sinx}$$

الحلّ: نفرض $t = tan\frac{x}{2}$

$$sinx = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

نعوض نجد:

$$I = \int \frac{dx}{sinx} = \int \frac{1}{t}dt = ln|t| + c = ln\left|tan\frac{x}{2}\right| + c$$

مثال3: أنجز التكامل

$$I = \int \frac{dx}{cosx}$$

الحلّ: نفرض $t = tan\frac{x}{2}$

$$cosx = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

نعوض نجد:

$$I = \int \frac{dx}{cosx} = \int \frac{2}{1-t^2}dt = 2 \times \frac{1}{2} ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + c = ln\left|\frac{1 + tan\frac{x}{2}}{1 - tan\frac{x}{2}}\right| + c$$
$$= ln\left|\frac{tan\frac{\pi}{4} + tan\frac{x}{2}}{1 - tan\frac{\pi}{4}tan\frac{x}{2}}\right| + c = ln\left|tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right| + c$$

ملاحظة1: دستوران للحفظ

$$\int \frac{dx}{sinx} = ln\left|tan\frac{x}{2}\right| + c$$
$$\int \frac{dx}{cosx} = ln\left|tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right| + c$$

ملاحظة2: التحويل $t = tan\frac{x}{2}$ يسمح دائماً بحل التكاملات من النمط $I = \int f(sinx, cosx)dx$، إلاّ أنه لا يُستخدم دائماً لأنه يقود غالباً إلى تكاملات لدوال صعبة.

نلاحظ بأن التحويل $t = tan\frac{x}{2}$ يستخدم من أجل حلّ التكاملات من النمط $\int \frac{dx}{acosx+bsinx+c}$

ملاحظة3: توجد الكثير من الحالات نستخدم من أجلها تحويلات أكثر ملائمة لحلّ التكامل $I = \int f(sinx, cosx)dx$

1. إذا كان $f(-sinx, cosx) = -f(sinx, cosx)$ لذلك نجري التحويل $t = cosx$.
2. إذا كان $f(sinx, -cosx) = -f(sinx, cosx)$ لذلك نجري التحويل $t = sinx$.
3. إذا كان $f(-sinx, -cosx) = f(sinx, cosx)$ لذلك نجري التحويل $t = tanx$.

مثال4: أنجز التكامل

$$I = \int \frac{sinx}{4 + cos^2x} dx$$

الحلّ:

$$f(sinx, cosx) = \frac{sinx}{4 + cos^2x}$$
$$f(-sinx, cosx) = -f(sinx, cosx)$$

بالتالي نفرض $t = cosx$ عندئذ $dt = -sinx\ dx$

$$I = \int \frac{sinx}{4 + cos^2x} dx = -\int \frac{dt}{4 + t^2} = -\frac{1}{2} arctan\left(\frac{t}{2}\right) + c = -\frac{1}{2} arctan\left(\frac{cosx}{2}\right) + c$$

مثال5: أنجز التكامل

$$I = \int \frac{sin^3x + 2sinx}{1 + cosx} dx$$

الحلّ:

$$f(sinx, cosx) = \frac{sin^3x + 2sinx}{1 + cosx}$$
$$f(-sinx, cosx) = -f(sinx, cosx)$$

بالتالي نفرض $t = cosx$ عندئذ $dt = -sinx\ dx$ بالتالي $sin^2x = 1 - cos^2x = 1 - t^2$

$$I = \int \frac{sin^3x + 2sinx}{1 + cosx} dx = \int \frac{t^2 - 3}{t + 1} dt = \int \frac{t^2 - 1 - 2}{t + 1} dt = \int \frac{(t - 1)(t + 1) - 2}{t + 1} dt$$
$$= \int \left(t - 1 - \frac{2}{t + 1}\right) dt = \frac{t^2}{2} - t - 2ln|t + 1| + c$$
$$= \frac{(cosx)^2}{2} - cosx - 2ln|cosx + 1| + c$$

مثال6: أنجز التكامل

$$I = \int \frac{cosx}{1 + sinx + sin^2x} dx$$

الحلّ:

$$f(sinx, cosx) = \frac{cosx}{1 + sinx + sin^2x}$$
$$f(sinx, -cosx) = -f(sinx, cosx)$$

بالتالي نفرض $t = sinx$ عندئذ $dt = cosx\ dx$

عندئذ

$$I = \int \frac{cosx}{1 + sinx + sin^2x} dx = \int \frac{dt}{t^2 + t + 1} = \int \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}} arctan\left(\frac{2t + 1}{\sqrt{3}}\right) + c$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}} arctan\left(\frac{2sinx + 1}{\sqrt{3}}\right) + c$$

مثال7: أنجز التكامل

$$I = \int \frac{sin^2x}{1 + cos^2x} dx$$

الحلّ:

$$f(sinx, cosx) = \frac{sin^2x}{1 + cos^2x}$$
$$f(-sinx, -cosx) = f(sinx, cosx)$$

بالتالي نفرض $t = tanx$ عندئذ $dt = \frac{1}{cos^2x}\, dx$

$$dt = (1 + tan^2x)\, dx = (1 + t^2)\, dx \Longrightarrow\ dx = \frac{dt}{1 + t^2}$$

نلاحظ:

$$1 + tan^2x = \frac{1}{cos^2x} \Longrightarrow cos^2x = \frac{1}{1 + t^2}$$

$$1 + cot^2x = \frac{1}{sin^2x} \Longrightarrow 1 + \frac{1}{t^2} = \frac{1}{sin^2x} \Longrightarrow sin^2x = \frac{t^2}{1 + t^2}$$

نعوض نجد:

$$I = \int \frac{sin^2x}{1 + cos^2x} dx = \int \frac{t^2}{(t^2 + 1)(t^2 + 2)} dt = \int \left(\frac{-1}{t^2 + 1} + \frac{2}{2 + t^2}\right) dt$$

$$= -arctan(t) + \frac{2}{\sqrt{2}} arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + c$$

$$= -arctan(tanx) + \sqrt{2}arctan\left(\frac{tanx}{\sqrt{2}}\right) + c = -x + \sqrt{2}arctan\left(\frac{tanx}{\sqrt{2}}\right) + c$$

❖ دراسة التكاملات من النمط

$$\int \boldsymbol{cos(\alpha x)cos(\beta x)dx}$$

$$\int \boldsymbol{sin(\alpha x)sin(\beta x)dx}$$

$$\int \boldsymbol{sin(\alpha x)cos(\beta x)dx}$$

حيث α, β عددين حقيقين غير معدومين.

يُحلّ هذا النوع من التكاملات بتجزئة الدالة المكاملة لمجموع دالتين وفق إحدى العلاقات التالية:

$$cos(\alpha x)cos(\beta x) = \frac{1}{2}[cos(\alpha - \beta)x + cos(\alpha + \beta)x]$$

$$sin(\alpha x)sin(\beta x) = \frac{1}{2}[cos(\alpha - \beta)x - cos(\alpha + \beta)x]$$

$$sin(\alpha x)cos(\beta x) = \frac{1}{2}[sin(\alpha - \beta)x + sin(\alpha + \beta)x]$$

مثال8: أنجز التكامل

$$\int sin5xcos3xdx$$

الحلّ:

$$\int sin5xcos3xdx = \int \frac{1}{2}[sin2x + sin8x]\, dx = \int \frac{1}{2}sin2x\, dx + \int \frac{1}{2}sin8x\, dx$$

$$= -\frac{1}{4}cos2x - \frac{1}{16}\cos 8x + \mathrm{c}$$

مثال9: أنجز التكامل

$$\int sin3xsinxdx$$

الحلّ:

$$\int sin3xsinxdx = \int \frac{1}{2}[cos2x - cos4x]\, dx = \frac{1}{4}sin2x - \frac{1}{8}\sin 4x + \mathrm{c}$$

❖ دراسة التكاملات من النمط

$$I = \int sin^m x cos^n x dx$$

1. إذا كان n أو m أو كلاهما فردياً عندئذ نخرج من القوة الفردية مضروباً واحداً ونعبر عمّا بقي في الدالة المكاملة باستخدام العلاقه الشهيرة $sin^2x + cos^2x = 1$ فنحصل على تكامل شهير.
2. إذا كان كلّ من n و m زوجيان عندئذ نستخدم العلاقات المثلثية التالية لتبسيط الدالة المكاملة.

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\frac{1}{2} sin2x = \sin x cos x$$

مثال10: أنجز التكامل

$$I = \int sin^3 x cos^2 x dx$$

الحلّ:

$$I = \int sin^2 x \sin x cos^2 x dx = \int (1 - cos^2 x)\sin x cos^2 x dx = \int (\sin x cos^2 x - \sin x cos^4 x) dx$$

$$= -\int (-\sin x) cos^2 x dx + \int (-\sin x) cos^4 x dx = -\frac{1}{3} cos^3 x + \frac{1}{5} cos^5 x + c$$

مثال11: أنجز التكامل

$$I = \int sin^4 x cos^3 x dx$$

الحلّ:

$$I = \int sin^4 x \cos x cos^2 x dx = \int sin^4 x \cos x (1 - sin^2 x) dx$$

$$= \int \cos x sin^4 x dx - \int \cos x sin^6 x dx = \frac{1}{5} sin^5 x - \frac{1}{7} sin^7 x + c$$

مثال12: أنجز التكامل

$$I = \int sin^2 x cos^2 x dx$$

الحلّ:

$$I = \int sin^2 x cos^2 x dx = \int (sinxcosx)^2 dx = \int \left(\frac{1}{2} sin2x\right)^2 dx = \int \frac{1}{4} sin^2 2x dx$$

$$= \int \frac{1}{4}\left(\frac{1 - cos4x}{2}\right) dx = \int \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8} cos4x\right) dx = \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} sin4x + c$$
