كلية العلوم

القسم : الفيزياء

السنة : الثالثة

المادة : فيزياء احصائية

المحاضرة: السادسة/نظري/كتابة

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

احصاء ماكسويل - بولتزمان :

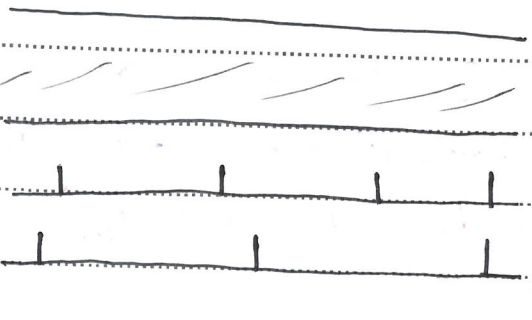
يدرس احصاء ماكسويل - بولتزمان توزع الجسيمات الكلاسيكية المتمايزة وهي جسيمات متطابقة الخواص وغير متفاعلة مع بعضها البعض و لاينطبق عليها مبدأ الاستبعاد لباولي أي الجسيمات لاكمية ويطبق هذا الاحصاء على الغازات المثالية وعلى تفاعلات الاشعاع مع المادة كما يدرس اصدار الليزر

نأخذ عبارة الوزن الاحصائي لتوزيع ماكسويل - بولتزمان :

نفرض جملة معزولة مكونة من N جسيم متمايز موزعة على ε_i سوية طاقية متحللة ودرجة تحلل كل منها g_i

تحتوي السوية الواحدة على N_i جسيم (ندعوه رقم انشغال السوية)

كما هو موضح بالشكل :



يجري التوزيع بحيث يتحقق قانون انحفاظ عدد الجسيمات $N = \sum_{i=1}^{M} N_i$

وطاقتها $U = \sum_i N_i \varepsilon_i$

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

بتطبيق قواعد العد يعطى عدد الحالات الميكروية الإجمالي W الناتج عن التوزع المسبق لـ N جسيم متمايز على M سوية (الموافقة للحالة الماكروية)

$$(N_1, N_2, N_3, \ldots, N_M)$$

حيث تعطى عدد الحالات الميكروية بالعلاقة:

$$W = \frac{N!}{\prod_{i=1}^{M} N_i!}$$

بما أن السوية الواحدة متحللة إلى طبقات (خلية) فمن أجل السوية i يعطى عدد حالات التوزع الميكروية W' الناتج عن توزع N_i جسيم متمايز على g_i خلية حيث يعطى بالعلاقة التالية:

$$W' = g_i^{N_i}$$

فمن أجل كافة السويات $i \in \{1, 2, \ldots, M\}$

يصبح عدد حالات التوزع الميكروية بالشكل التالي:

$$W'' = \prod_{i=1}^{M} g_i^{N_i}$$

فيكون العدد الإجمالي لحالات التوزع الميكروية (يدعى بالوزن الاحصائي W) الموافق للحالة الماكروية مسبقة التوزيع:

$$(N_1, N_2, N_3, \ldots, N_M)$$

الوزن الاحصائي (وفق توزيع ماكسويل - بولتزمان)

$$W_{M-B} = W \cdot W'' = \frac{N!}{\prod_{i=1}^{M} N_i!} \prod_{i=1}^{M} g_i^{N_i} = N! \prod_{i=1}^{M} \frac{g_i^{N_i}}{N_i!}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نلاحظ أن الوزن الاحصائي مقدار عديم البعد أي ليس له واحدة لأنه عبارة عن عدد

حالة التوازن:

هي الحالة الماكروية الموافقة لوزن أحصائي أعظمي $W_{M-B\ max}$

الطاقة الكلية أصغرية

مثال:

جملة معزولة مكونة من جسيمين متمايزان A و B موزعين على سويتين للطاقة $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$ ، $\varepsilon_2 = 2\varepsilon_2$ متحللتين درجة تحلل $g_1(\varepsilon_0) = 1$ و $g_2(2\varepsilon_0) = 2$ والمطلوب:

1- أوجد حالات التوزع الماكروي الاجمالي و طاقة كل منها.

2- أوجد الوزن الاحصائي لكل حالة ماكروية مع التمثيل واستنتج حالة التوازن

الحل:

1- عدد الحالات الماكروية الاجمالية

$$N_0 = \frac{(N + N_\varepsilon - 1)!}{N!\,(N_\varepsilon - 1)!} = \frac{(2+2-1)!}{2!\,(2-1)!} = 3$$

حالات التوزع الماكروي الاجمالية:

$$\{(2,0)\,;(0,2)\,;(1,1)\}$$

نحسب الطاقة لكل منها

$U = 2\varepsilon_0$ $U = 4\varepsilon_0$ $U = 3\varepsilon_0$

2- $W_{M-B} =$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$W_{(2,0)} = N! \prod_{i=1}^{M} \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} = 2! \left(\frac{1^2}{2!} \times \frac{2^0}{0!} \right) = 1$$

$$W_{(0,2)} = 2! \left(\frac{1^0}{0!} \times \frac{2^2}{2!} \right) = 4$$

$$W_{(1,1)} = 2! \left(\frac{1^0}{1!} \times \frac{2^1}{1!} \right) = 4$$

التمثيل للحالة (2,0)

1	ε_2
AB	ε_1

التمثيل للحالة (0,2)

AB1	1AB	A1B	B1A
ε_2	ε_2	ε_2	ε_2
ε_1	ε_1	ε_1	ε_1

التمثيل للحالة (1,1)

B1	1B	A1	1A
ε_2	ε_2	ε_2	ε_2
A	A	B	B
ε_1	ε_1	ε_1	ε_1

حالة التوازن:

الحالة الموافقة للأقل طاقة هي عبارة عن (1,1) لأن طاقتها

$U_{(1,1)} = 3\varepsilon_0$ في حين $U_{(0,2)} = 4\varepsilon_0$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

تمرين محلول: / وظيفة /

يوزع خمسة كتب مختلفة (A, B, C, D, E) (مسميات متغايرة) على رفين في مكتبة (مستوي الطاقة) (ε_1 و ε_2) فإذا علمت أن الرف الأول مقسم إلى ثلاثة حجرات والثاني لحجرتين (درجات القلل) $g_1 = 3$ و $g_2 = 2$ وأن الطاقة التي يبنها الشخص لوضع كتاب بالرف الأول $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$ وفي الرف الثاني $\varepsilon_2 = 2\varepsilon_0$ والمطلوب:

1- أوجد حالات التوزع الماكروي وطاقة كل منها

2- أوجد الأوزان الاحصائية للحالات الماكروية بتطبيق إحصاء ماكسويل بولتزمان W_{M-B} ثم استخدم قواعد العد في التأكد من صحة

أ- العدد الاجمالي للحالات الميكروية (بصرف النظر عن تواجد الرفوف)

ب- الوزن الاحصائي لتوزع الحالات الماكروية

3- هل تختلف حالات التوزع الأكثر احتمالاً عند مراعاة التصنيف أثناء التوزيع من عدمه

معادلة لاغرانج:

استنفاد لاغرانج من المواصفات التالية للجملة الترموديناميكية المعزولة الواقعة في حالة التوازن

($S_{max} = cte$; $N = cte$; $U = cte$)

فنقوم بصياغة هذه الجملة على شكل مضاريب C_1 و C_2 كما يلي:

$$S_{max} + C_1 N + C_2 U = cte$$

بالتعويض عن الانتروبية S_{max} بقيمتها من قانون بولتزمان

$S_{max} = k \ln W_{max}$ والقسمة على ثابت بولتزمان نحصل على ما يلي:

$$\ln W_{max} + \frac{C_1}{k} N + \frac{C_2}{k} U = \frac{cte}{k} = cte$$

نعرف مضاريب لاغرانج بـ α و β بالشكل التالي:

$$\alpha = \frac{C_1}{k} \quad , \quad \beta = \frac{C_2}{k}$$

فتصبح المعادلة:

$$\ln W_{max} + \alpha N + \beta U = cte$$

بمفاضلة الطرفين لهذه المعادلة نحصل على:

$$d \ln W_{max} + \alpha \, dN + \beta \, dU = 0 \quad \ldots\ldots (1)$$

← هذه العلاقة المطلوبة في الاستنتاج.

وتسمى هذه المعادلة بمعادلة لاغرانج

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ونلاحظ أن حدود هذه المعادلة تعبر عن أعداد عديمة البعد ونجد أن المضروب α يكون عديم البعد في حين تكون واحدة قياس المضروب β هو عبارة عن $\beta = j^{-1}$

عبارة أرقام انشغال السويات المنفصلة في حالة التوزع (توزع ماكسويل - بولتزمان في الحالة الأكثر احتمالاً).

نتطلق من عبارة الوزن الاحصائي لتوزيع ماكسويل - بولتزمان W_{M-B} المعطاة في العلاقة:

$$W_{M-B} = N! \prod_i^M \frac{g_i^{N_i}}{N_i!}$$

في البداية نوجد $\ln W_{M-B}$

$$d \ln W_{M-B} + \alpha dN + \beta du = 0 \quad \dots (1)$$

$$\ln W_{M-B} = \ln \left[N! \prod_i^M \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \right]$$

$$= \ln N! + \ln \left(\prod_i^M \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \right)$$

$$= \ln N! + \sum \left[N_i \ln g_i - \ln N_i! \right] \quad \dots (2)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

بما أن الجسيمات الكلاسيكية سنستخدم تقريب ستيرلينغ

$$\ln x! = x \ln x - x$$

$$(3) \quad \ln W_{M-B} \simeq N \ln N - N + \sum N_i \ln g_i - N_i \ln N_i + N_i$$

بما أن الوزن الاحصائي W_{M-B} تابع لكل من N_i و g_i وحيث أننا نبحث عن عدد جسيمات N_i موزعة على الحوية (i) التي درجة تحللها g_i ثابتة فأننا نأخذ بعين الاعتبار العلاقة (3):

$$d \ln W_{M-B} \simeq \frac{\partial \ln (W_{M-B})}{\partial N_i} dN_i =$$

$$\frac{\partial}{\partial N_i} \left[N \ln N - N + \sum_i (N_i \ln g_i - N_i \ln N_i + N_i \right] dN_i$$

وبشكل تقريبي:

$$\simeq \sum \ln \frac{g_i}{N_i} dN_i \quad \ldots (4)$$

بتعويض (4) في (1) مع الأخذ بعين الاعتبار شرطي انحفاظ عدد الجسيمات والطاقة

$$U = \sum \varepsilon_i N_i \Rightarrow dU = \sum \varepsilon_i dN_i$$

$$N = \sum_i N_i \Rightarrow dN = \sum_i dN_i$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نحصل على رقم انشغال في الحالة الأكثر احتمالاً:

$$\sum_i \ln \frac{g_i}{N_i}\, dN_i + \alpha \sum_i dN_i + \beta \sum_i \varepsilon_i\, dN_i = 0 \quad \ldots (5)$$

بالاختصار لهذه العلاقة

$$\sum_i \left(\ln \frac{g_i}{N_i} + \alpha + \beta \varepsilon_i \right) dN_i = 0$$

$$\ln \frac{g_i}{N_i} = -(\alpha + \beta \varepsilon_i)$$

$$\Rightarrow N_{i(M-B)} = g_i\, e^{\alpha + \beta \varepsilon_i} = e^{\alpha} g_i\, e^{\beta \varepsilon_i} \quad \ldots (6)$$

هذه نقطة مطلوبة من الاستنتاج

تعبر العلاقة (6) عن أرقام انشغال السويات ε_i في الحالة المتوازنة للجملة (حالة التوازن الأكثر احتمالاً) أي تعطينا أعداد الجسيمات المتمايزة الكلاسيكية في كل سوية من سويات الطاقة المنفصلة ε_i.

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة