كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الثانية**

المادة : كهرباء ومغناطيسية٢

المحاضرة : **السادسة/نظري/**

{{ مكتبة A to Z }}

2024 2025

Facebook Group : مكتبة A to Z

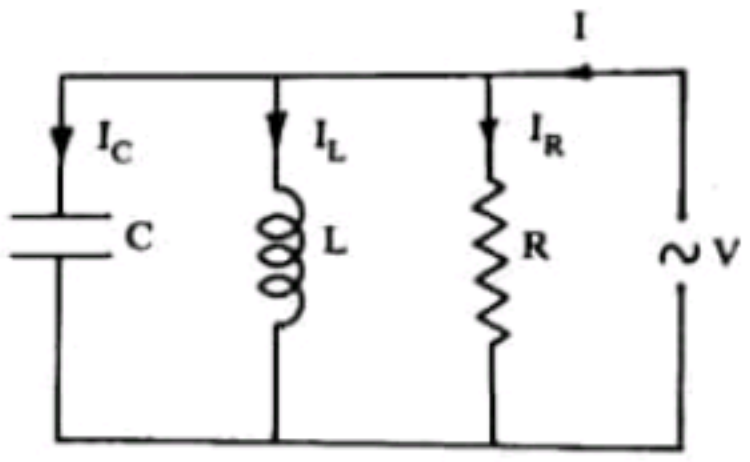
كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

(٨ـ٦) دائرة التيار المتردد المتوازية «أو المتفرعة»
Parallel or Branched A.C. Circuit

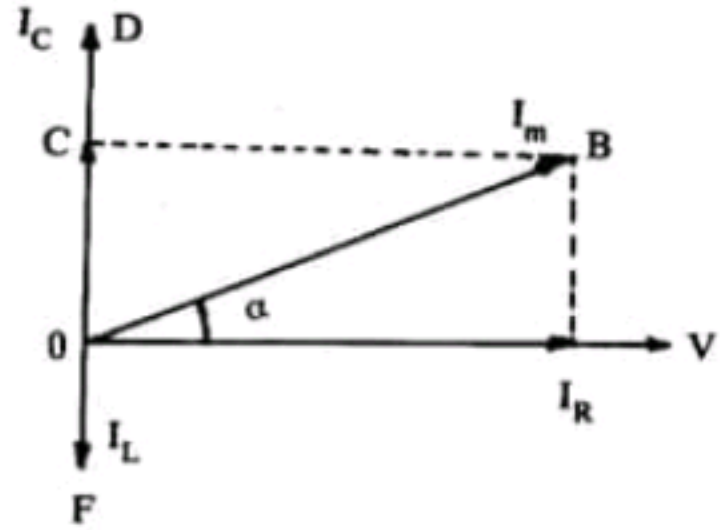
(٨ـ٦ـ١) مقاومة وملف ومكثف متصلة على التوازي R,C and L in Parallel

في دوائر التيار المتردد السابقة الذكر كانت المقاومة والملف والمكثف متصلة على التوالي وكان التيار له القيمة نفسها في جميع نقاط الدائرة ولكنها إذا وصلت على التوازي فإن كل تيار يمر بفرع معين يتوقف على قيمة المقاومة أو الممانعة بهذا الفرع والمجموع الاتجاهي (vector sum) لكل التيارات المارة بكل فرع يساوي التيار الكلي للدائرة.



شكل (١٩ـ٨): دائرة تيار متردد تحتوي على مقاومة R وملف L ومكثف C متصلة على التوازي.

توجد في الدائرة شكل (١٩ـ٨) قوة دافعة كهربية مترددة قيمتها $V = V_m \sin \omega t$ موصلة إلى دائرة تحتوي على مقاومة R أوم ورد حثي قيمته $X_L = \omega L$ أوم ورد سعوي قيمته $X_C = \frac{1}{\omega C}$ أوم موصلة معا على التوازي. فإذا كان I هو التيار الكلي فإن:



شكل (٢٠ـ٨): مخطط المتجهات بين I_R، I_L و I_C وعلاقتها بالمحصلة I وزاوية الطور α للدائرة الواردة في شكل (١٩ـ٨).

$$\vec{I} = \vec{I}_R + \vec{I}_L + \vec{I}_C \quad \cdots \quad (٨ـ٥٦)$$

بإهمال المقاومة الأومية لكل من L ، C يمكن الحصول على:

$$I_R = \frac{V}{R} \quad , \quad I_L = \frac{V}{\omega L} \quad , \quad I_C = VC\omega \quad (٨ـ٥٧)$$

ويتضح من الشكل (٢٠ـ٨) أن I_L متخلف (lags) عن V بزاوية قدرها $\pi/2$ و I_C متقدم (leads) عن V بزاوية قدرها $\pi/2$.

كذلك يوضح الشكل نفسه أن التيار المار في الملف يسري في عكس اتجاه التيار المار في المكثف C وأن التيار المار في المقاومة R متفق في الطور مع V. فإذا كان OD يمثل التيار خلال C و OF يمثل التيار خلال L فإن محصلتها يمثلها OC وهذه المحصلة مع I_R تعطي المحصلة I_m والممثلة بالمتجه OB ومما تقدم نجد أن:

$$I_m = \left\{ I_R^2 + (I_C - I_L)^2 \right\}^{1/2}$$

$$I_m = V \left\{ \frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2 \right\}^{1/2} \quad \ldots\ldots \quad (٨-٥٨)$$

ومن تعريف الممانعة (impedance) يصبح:

$$Z = \frac{1}{\left\{ \frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2 \right\}^{1/2}} \quad \ldots \quad (٨-٥٩)$$

ومقلوب Z يسمى بالقبولية (admittance) ويرمز لها بالرمز Y حيث:

$$Y = \frac{1}{Z} = \left\{ \frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2 \right\}^{1/2} \ldots\ldots \quad (٨-٦٠)$$

ويسمى المقدار $(\omega C - 1/\omega L)$ بالتأثرية (susceptance) وهو معكوس الممانعة.

ويسبق التيار الجهد أو يتخلف عنه بزاوية قدرها α حيث:

$$\tan \alpha = \frac{I_C - I_L}{I_R}$$

$$\tan \alpha = \frac{V\omega C - \frac{V}{\omega L}}{\frac{V}{R}} = R\left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \quad \ldots\ldots \quad (٨-٦١)$$

ومن المعادلات (٨ـ٥٨)، (٨ـ٥٩) و(٨ـ٦١) يمكن استنتاج الحالات الآتية:

ا ـ إذا كان التيار $I_L = 0$

أي أن الدائرة تحتوي على مقاومة ومكثف فقط، فإن تيار الدائرة يعطى، حسب المعادلة (٨ـ٥٨)، بالمعادلة التالية:

$$I_m = \left(I_R^2 + I_C^2\right)^{1/2} = V\left\{\frac{1}{R^2} + (\omega C)^2\right\}^{1/2} \quad (٨ـ٦٢)$$

حيث تصبح الممانعة:

$$Z = \frac{1}{\left\{\frac{1}{R^2} + (\omega C)^2\right\}^{1/2}} = \left\{\frac{R^2}{1 + \omega^2 C^2 R^2}\right\}^{1/2} \quad (٨ـ٦٣)$$

وزاوية الطـور:

$$\tan\alpha = \frac{I_C}{I_R} = \frac{\omega C}{\frac{1}{R}} = R\omega C \quad \ldots\ldots \quad (٨ـ٦٤)$$

ب ـ إذا كان التيار $I_C = 0$

أي أن الدائرة تحتوي مقاومة وملف، فإن تيار الدائرة، حسب المعادلة (٨ـ٥٨)، يأخذ القيمة التالية:

$$I_m = \left(I_R^2 + I_L^2\right)^{1/2} = V\left\{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{\omega^2 L^2}\right\}^{1/2} \quad (٨ـ٦٥)$$

حيث تصبح الممانعة:

$$Z = \frac{1}{\left\{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{\omega^2 L^2}\right\}^{1/2}} = \left\{\frac{R^2\omega^2 L^2}{\omega^2 L^2 + R^2}\right\}^{1/2} \quad (٨ـ٦٦)$$

وزاوية الطـــور:

$$\tan\alpha = -\frac{R}{\omega L} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٨-٦٧)$$

والإشارة السالبة هنا تدل على أن التيار المحصل متخلف عن الجهد V.

جـ ـ إذا كان التيار $I_R = 0$

أي أن الـدائرة تحتوي على مكثف وملف فقط كما في الشكل (٨-٢١)، فإنه حسب مخطط المتجهات الواردة في الشكل (٨-٢٢) يكون التيار I_L متخلفا عن الجهد بزاوية قدرها $\pi/2$ بينما يتقدم التيار I_C الجهد بزاوية قدرها $\pi/2$ وتكون قيمة التيار المحصل:

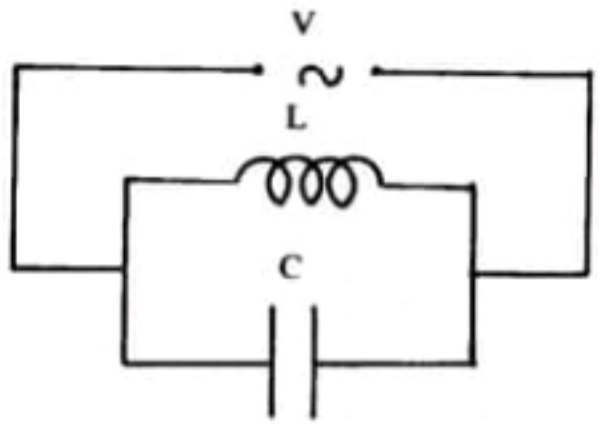
$$I_m = I_L - I_C \quad \text{إذا كان} \quad I_L > I_C$$

أو

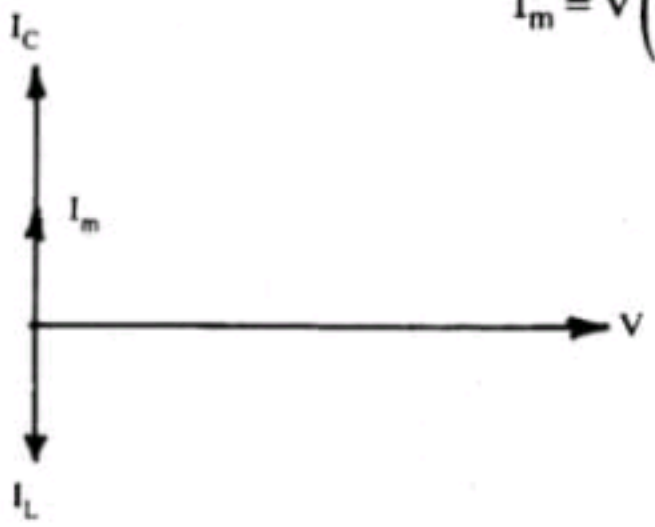
$$I_m = I_C - I_L \quad \text{إذا كان} \quad I_C > I_L$$

وإذا أخذ في الاعتبار الحالة الأخيرة فإن شدة التيار المحصل:

$$I_m = V\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٨-٦٨)$$



شكل (٨-٢١): دائرة تيار متردد تحتوي على ملف L ومكثف C متصلة على التوازي.



شكل (٨-٢٢): مخطط المتجهات بين I_C و I_L للدائرة الواردة في شكل (٨-٢١) وعلاقتهما بالمحصلة I

وهذا التيار يتقدم الجهد بزاوية قدرها $\pi/2$. ويتضح من المعادلة (٨ـ٦٨) أن ممانعة هذه الدائرة هي :

$$Z = \frac{1}{\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)} = \frac{\omega L}{\omega^2 CL - 1} \quad \ldots\ldots \quad (٨ـ٦٩)$$

وواضح من المعادلتين (٨ـ٦٨)، (٨ـ٦٩) أن التيار الكلي يصبح صفرا والممانعة تصبح لانهائية وذلك عند توفر شرط الرنين أي أن :

$$\omega_r C = \frac{1}{\omega_r L} \quad \therefore \omega_r^2 = \frac{1}{CL}$$

$$\therefore \omega_r = \frac{1}{\sqrt{CL}} \quad \therefore f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{CL}} \quad \ldots \quad (٨ـ٧٠)$$

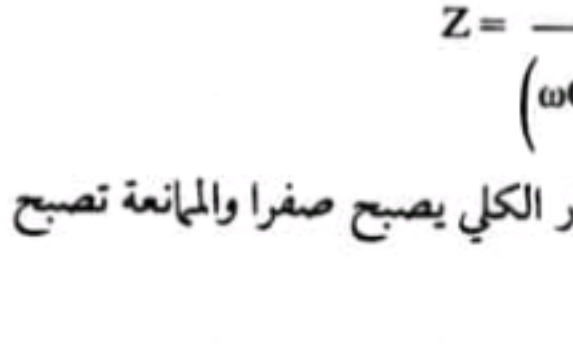
حيث f_r هو تردد الرنين الذاتي للدائرة والذي عنده يكون التيار المحصل صفرا والمقاومة الكلية ما لانهاية وتعرف الدائرة في هذه الحالة بالدائرة الخانقة (rejector circuit) تمييزا لها عن دائرة رنين التوالي التي يكون فيها التيار نهاية عظمى والتي تسمى بالدائرة القابلة (acceptor circuit).

ويلاحظ أن التيار المحصل يختفي في حالة رنين الدائرة الخانقة بينما لا يختفي I_L ، I_C ويستفاد بالدائرة الخانقة في استبعاد الإشارة غير المرغوب فيها في الاستقبال اللاسلكي .

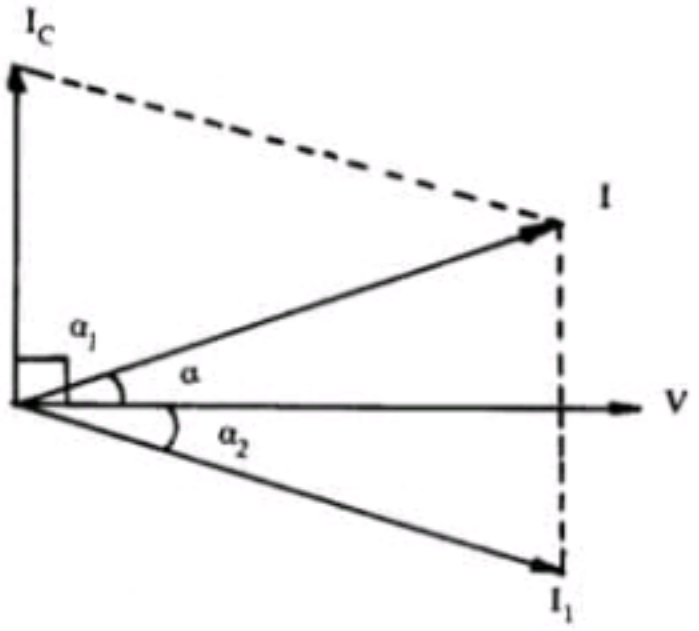
(٨ـ٦ـ٢) قوة دافعة كهربية على التوازي مع مكثف وملف حثي ذو مقاومة أومية

R L and C in Parallel

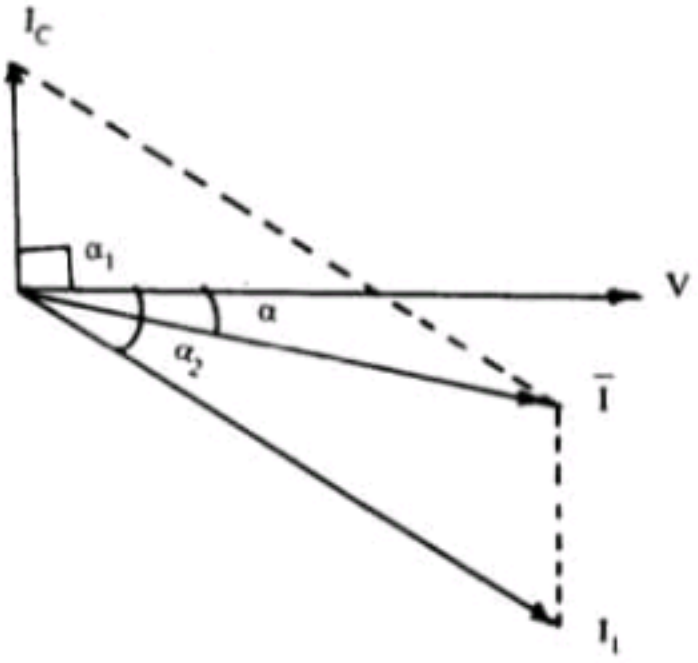
بالنظر إلى الدائرة (٨ـ٢٣) وإلى رسم مخطط المتجهات (٨ـ٢٤) يمكن القول بأن: التيار I_1 المار في الملف الذي حثه L ومقاومته R يتخلف عن الجهد بزاوية قدرها α_2 كما درس من قبل، في الشكل (٨ـ١١)، وأما التيار I_C المار في المكثف



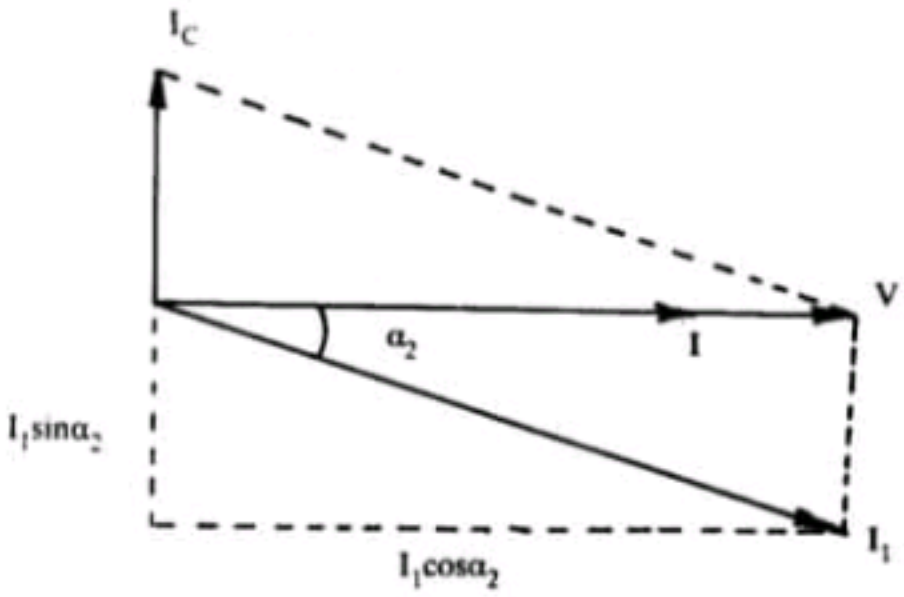
شكل (٨ـ٢٣): دائرة تيار متردد تحتوي على ملف L له مقاومة R يتصل على التوازي مع مكثف C



(أ)



(ب)



(ج)

شكل (٢٤ـ٨): مخطط المتجهات بين I_c ، I_1 و V للدائرة (٢٢ـ٨).

الـذي سعتـه C فيكون متقدما عن الجهد بزاوية $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$ حيث:

$$I_C = V\omega C \quad \ldots\ldots \quad (٨-٧١)$$

وطبقا للمعادلة (٨-٣٧) يكون:

$$I_1 = \frac{V}{(R^2 + \omega^2 L^2)^{1/2}} \ , \ \tan\alpha_2 = \frac{\omega L}{R} \quad \ldots \quad (٨-٧٢)$$

ويكون التيار المحصل:

$$I = \{I_C^2 + I_1^2 + 2\, I_c I_1 \cos(\alpha_1 + \alpha_2)\}^{1/2} \ldots \quad (٨-٧٣)$$

وهو متقدم أو متخلف عن الجهد بزاوية α حيث:

$$\tan\alpha = \frac{I_1 \sin\alpha_2 - I_C}{I_1 \cos\alpha_2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٨-٧٤)$$

ويمكن الحصول من المعادلة (٨-٧٢) على:

$$\sin\alpha_2 = \frac{\omega L}{\{R^2 + \omega^2 L^2\}^{1/2}} \ , \ \cos\alpha_2 = \frac{R}{\{R^2 + \omega^2 L^2\}^{1/2}}$$

وبالتعويض عن I_c ، I_1 من المعادلتين (٨-٧١) و(٨-٧٢) وكذلك عن $\sin\alpha_1$, $\cos\alpha_2$ في المعادلة (٨-٧٤) يمكن الحصول على:

$$\tan\alpha = \frac{\omega L - \omega C(R^2 + \omega^2 L^2)}{R} \quad \ldots\ldots \quad (٨-٧٥)$$

وبالرجوع إلى المعادلة (٨-٧٣) يكون:

$$\cos(\alpha_1 + \alpha_2) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha_2\right)$$

$$= \cos\frac{\pi}{2}\ \cos\alpha_2 - \sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha_2 = -\sin\alpha_2$$

وبالتعويض عن هذه القيمة و I_1 ، I_C في المعادلة (٨-٧٣) يمكن الحصول على:

$$I_m = V\left\{\omega^2 C^2 - \frac{2\omega^2 CL}{R^2+\omega^2 L^2} + \frac{1}{R^2+\omega^2 L^2}\right\}^{1/2}$$

$$I_m = V\left\{\frac{\omega^2 C^2 (R^2+\omega^2 L^2) - 2\omega^2 CL + 1}{R^2+\omega^2 L^2}\right\}^{1/2}$$

$$I_m = V\left\{\frac{\omega^2 C^2\left(R^2+\omega^2 L^2 - \frac{2L}{C} + \frac{1}{\omega^2 C^2}\right)}{R^2+\omega^2 L^2}\right\}^{1/2}$$

$$I = V\left\{\frac{\omega^2 C^2\left[R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right]}{R^2+\omega^2 L^2}\right\}^{1/2} \quad .. \quad (٨-٧٦)$$

وبذلك تكون قيمة الممانعة الكلية:

$$Z = \left\{\frac{R^2+\omega^2 L}{\omega^2 C^2\left[R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right]}\right\}^{1/2} \quad ... \quad (٨-٧٧)$$

وبالرجوع إلى الرسم الاتجاهي شكل (٢٤جـ ـ ٨) نجد أنه عندما يكون $I_C = I_1 \sin\alpha_2$ فإن:

$$I = I_1 \cos\alpha_2 = \frac{VR}{(R^2+\omega^2 L^2)} \quad ..... \quad (٨-٧٨)$$

وذلك حسب المعادلة (٨-٧٣).

وهذا هو أقل تيار ممكن بالنسبة لهذه الدائرة في حالة الرنين الخانق ويصبح التيار المحصل متفقا في الطور مع الجهد V أي أن:

$$\alpha = 0 \ , \ \tan\alpha = 0$$

وبالرجوع إلى معادلة (٨-٧٥) فإنه في حالة الرنين نجد أن:

$$L - C(R^2 + \omega_r^2 L^2) = 0$$

أو

$$L - CR^2 - C\omega_r^2 L^2 = 0$$

أو

$$-C\omega_r^2 L^2 = CR^2 - L$$

$$\therefore \omega_r^2 = \frac{1}{CL} - \frac{R^2}{L^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٨-٧٩)$$

وبالتعويض من (٨-٧٩) في معادلة (٨-٧٨) يُحصل على:

$$I = \frac{V \times RC}{L} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٨-٨٠)$$

أي أن الممانعة تصبح في هذه الحالة مكافئة لمقاومة أومية قدرها:

$$Z_r = \frac{L}{RC} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٨-٨١)$$

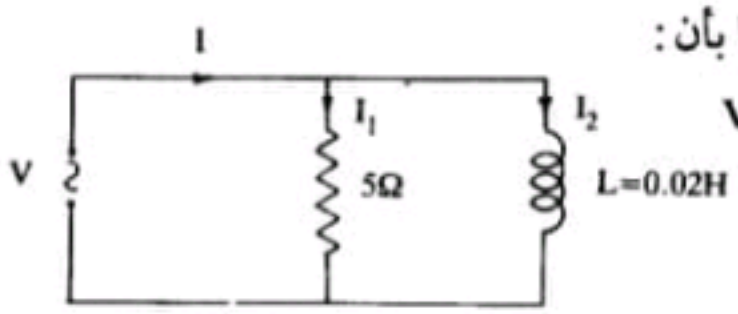
وتكون الدائرة في حالة رنين وخانقة أيضا.

وتعرف ممانعة الدائرة عند الرنين، المعادلة (٨-٨١)، بالمقاومة الديناميكية (dynamic resistance) للدائرة. وتكون ممانعة الدائرة حثية عند تردد أقل من تردد الرنين وقيمتها أقل من L/RC ، في حين عند تردد أكبر من تردد الرنين تصبح الممانعة سعوية وقيمتها أقل من L/RC أيضا.

مثال (٨-١١)

في الدائرة المجاورة احسب I علما بأن:

$$V = 100 \sin (1000t + 50°)$$



الحل

$$I = I_1 + I_2 = \frac{V}{R} + \frac{1}{L}\int V dt$$

$$I = 20 \sin (1000t + 50°) - 5 \cos (1000t + 50°) \quad \ldots - (ا)$$

أو

$$I = A' \sin (1000t + 50°) \cos \alpha + A' \cos (1000t + 50°) \sin \alpha \quad \ldots - (ب)$$

من المعادلتين (ا) و (ب) يُحصل على:

$$20 = A' \cos \alpha \quad \text{و} \quad -5 = A' \sin \alpha$$

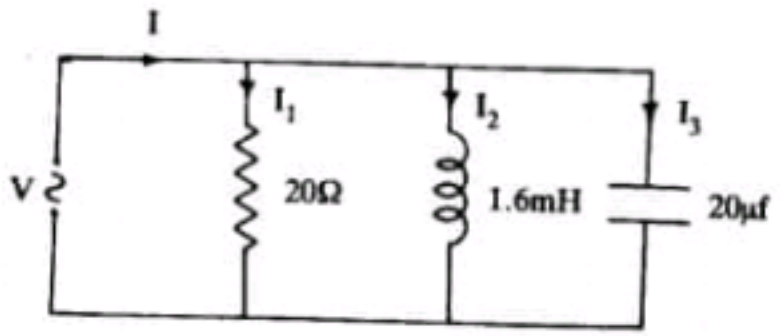
$$\therefore \tan \alpha = -0.25 \quad \therefore \alpha = \tan^{-1} (-0.25) = -14.04°$$

$$\& \; A' = \frac{20}{\cos \alpha} = 20.6$$

وبالتعويض في المعادلة (ب) يُحصل على:

$$I = 20.6 \sin (1000t + 50° - 14.05) = 20.6 \sin (1000t + 35.95) \quad A$$

أي أن التيار يتأخر عن الجهد بزاوية قدرها 14.05°.



مـثـال (١٢ـ٨)

في الدائرة المجاورة احسب I علما بأن:

$$V = 50 \sin (5000t + 45°)$$

الحـــل

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

$$I = \frac{V}{R} + \frac{1}{L} \int V dt + C \frac{dV}{dt}$$

$$I = 2.5 \sin (5000t + 45°) - 6.25 \cos (5000t + 45°)$$

$$+ 5 \cos (5000t + 45)$$

$$\therefore \quad I = 2.5 \sin (5000t + 45°) - 1.25 \cos (5000t + 45°)$$

وباتباع الطريقة السابقة نفسها في المثال (١١ـ٨) يُحصل على:

$$I = 2.8 \sin (5000t + 18.4°) \quad A$$

أي أن التيار يتأخر عن الجهد بزاوية قدرها:

$$45° - 18.4° = 26.6°$$

مكتبة A to Z