كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الثانية**

المادة : توابع خاصة

المحاضرة : الثامنة /نظري/ د.علي أسد

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الفيزياء

مقرر: التوابع الخاصة
المحاضرة: الثامنة
د. علي أسد

دوال بيسل

تعرف معادلة بيسل من الرتبة n كالآتي:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-n^2)y=0 \qquad (1)$$

لهذه المعادلة حلان: عندما $s=+n$ يكون حل المعادلة من الشكل:

$$J_n(x)=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{1}{r!\,\Gamma(n+r+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2r+n} \qquad (2)$$

عندما $s=-n$ يكون حل المعادلة من الشكل:

$$J_{-n}(x)=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{1}{r!\,\Gamma(-n+r+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2r-n} \qquad (3)$$

❖ الدالة المولدة لدالة بيسل:

$$\exp\left\{\frac{1}{2}x\left(t-\frac{1}{t}\right)\right\}=\sum_{-\infty}^{+\infty}t^nJ_n(x) \qquad (4)$$

<u>الإثبات:</u> بما أن:

$$\exp\left\{\frac{1}{2}x\left(t-\frac{1}{t}\right)\right\}=\exp\left(\frac{xt}{2}\right)\exp\left(-\frac{x}{2t}\right)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}xt\right)^r}{r!}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{-x}{2t}\right)^s}{s!}$$

$$=\sum_{r,s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s\left(\frac{1}{2}\right)^{r+s}x^{r+s}t^{r-s}}{r!\,s!}$$

إذا كان $n=r-s\geq 0$ فإن $r=n+s$ ويكون:

$$\text{معامل } t^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^s\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2s+n}x^{2s+n}}{(n+s)!\,s!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^s \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2s+n}}{\Gamma(n+s+1)!\, s!} = J_n(x)$$

للحصول على حدود تحوي t^{-n} يجب أن يكون $s = n + r \geq 0$ وعليه فإن:

معامل t^{-n} $= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+r} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2r+n}}{(n+r)!\, r!} = (-1)^n \sum_{n=0}^{\infty} (1)^r \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2r+n}}{\Gamma(n+r+1)!\, r!}$

$$= (-1)^n J_n(x) = J_{-n}(x)$$

وبالتالي:

$$\exp\left\{\frac{1}{2}x\left(t - \frac{1}{t}\right)\right\} = J_0(x) + tJ_1(x) + \cdots + t^n J_n(x) + \cdots + \frac{1}{t}J_{-1}(x) + \cdots + \frac{1}{t^m}J_{-m}(x) + \cdots$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} t^n J_n(x)$$

❖ العلاقات التكرارية:

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}\{x^n J_n(x)\} = x^n J_{n-1}(x)} \qquad (5)$$

<u>الإثبات:</u>

نستخدم العلاقة الآتية:

$$J_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{r!\,\Gamma(n+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+n}$$

نضرب الطرفين بـ x^n ثم نفاضل فنحصل على:

$$\frac{d}{dx}\{x^n J_n(x)\} = \frac{d}{dx}\left\{\sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{r!\,\Gamma(n+r+1)} \left(\frac{1}{2}\right)^{2r+n} x^{2r+2n}\right\}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{(2r+2n)x^{2r+2n-1}}{r!\,\Gamma(n+r+1)} \left(\frac{1}{2}\right)^{2r+n}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{(n+r)x^{2r+2n-1}}{r!\,(n+r)\Gamma(n+r)} \left(\frac{1}{2}\right)^{2r+n-1}$$

$$= x^n \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{x^{2r+2n-1}}{r!\,\Gamma(n+r)} \left(\frac{1}{2}\right)^{2r+n-1}$$

$$= x^n \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{r!\,\Gamma(n+r)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+n-1}$$

$$= x^n J_{n-1}(x)$$

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}\{x^{-n}J_n(x)\} = -x^{-n}J_{n+1}(x)} \qquad \textbf{(6)}$$

<u>الإثبات:</u>

لاحظ أن:

$$\frac{d}{dx}\{x^{-n}J_n(x)\} = \frac{d}{dx}\left\{\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r \frac{1}{r!\,\Gamma(n+r+1)}\left(\frac{1}{2}\right)^{2r+n} x^{2r}\right\}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r \frac{2r}{r!\,\Gamma(n+r+1)}\left(\frac{1}{2}\right)^{2r+n} x^{2r-1}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r \frac{r}{r!\,\Gamma(n+r+1)}\left(\frac{1}{2}\right)^{2r+n-1} x^{2r-1}$$

ينعدم هذا المقدار عندما $r = 0$ لذلك نضع $r = s + 1$ فيكون:

$$\frac{d}{dx}\{x^{-n}J_n(x)\} = \sum_{s=0}^{\infty}(-1)^{s+1} \frac{s+1}{(s+1)!\,\Gamma(n+s+2)}\left(\frac{1}{2}\right)^{2(s+1)+n-1} x^{2(s+1)-1}$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty}(-1)^{s+1} \frac{x^{2s+1}}{s!\,\Gamma(n+s+2)}\left(\frac{1}{2}\right)^{2s+n+1}$$

$$= -x^{-n}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2s+n+1}}{s!\,\Gamma(n+s+2)} = -x^{-n}J_{n+1}(x)$$

$$\boldsymbol{J'_n(x) = J_{n-1}(x) - \frac{n}{x}J_n(x)} \qquad \textbf{(7)}$$

<u>الإثبات:</u>

نفاضل العلاقة (5) فنجد:

$$x^n J'_n(x) + nx^{n-1}J_n(x) = x^n J_{n-1}(x)$$

بالقسمة على x^n نجد:

$$J'_n(x) + \frac{n}{x}J_n(x) = J_{n-1}(x)$$

$$\boldsymbol{J'_n(x) = \frac{n}{x}J_n(x) - J_{n+1}(x)} \qquad \textbf{(8)}$$

الإثبات: من العلاقة (6) نجد:

$$x^{-n}J'_n(x) - nx^{-n-1}J_n(x) = -x^{-n}J_{n+1}(x)$$

نضرب الطرفين بـ x^n

$$J'_n(x) - \frac{n}{x}J_n(x) = -J_{n+1}(x)$$

$$J'_n(x) = \frac{n}{x}J_n(x) - J_{n+1}(x)$$

بجمع المعادلتين (7) و (8):

$$J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2J'_n(x)$$

$$\boldsymbol{J'_n(x) = \frac{1}{2}\{J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)\}} \qquad \boldsymbol{(9)}$$

بطرح (8) من (7) نجد:

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) - \frac{2n}{x}J_n(x) = 0$$

$$\boldsymbol{J_n(x) = \frac{x}{2n}\{J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)\}} \qquad \boldsymbol{(10)}$$

<u>تمرين:</u>

أثبت صحة العلاقة:

$$\boldsymbol{J_3(x) + 3J'_0(x) + 4J'''_0(x) = 0} \qquad \boldsymbol{(11)}$$

<u>الإثبات:</u>

نستخدم العلاقة الآتية:

$$J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2J'_n(x)$$

نضع: $n = 2$

$$J_1(x) - J_3(x) = 2J'_2(x) \qquad (12)$$

نضع: $n = 1$

$$J_0(x) - J_2(x) = 2J'_1(x) \qquad (13)$$

بتفاضل العلاقة (13) نحصل على:

$$J'_0(x) - J'_2(x) = 2J''_1(x) \qquad (14)$$

بالحل المشترك للمعادلات (12) و (13) و (14) وحذف $J'_2(x)$ نحصل على المعادلة:

$$J_3(x) = J_1(x) - 2J'_0(x) + 4J''_1(x) \quad (15)$$

لكن:

$$\frac{d}{dx}\{x^{-n}J_n(x)\} = -x^{-n}J_{n+1}(x)$$

بوضع: $n = 0$

$$J'_0(x) = -J_1(x)$$

بالتعويض في (15) نجد:

$$J_3(x) + 3J'_0(x) + 4J'''_0(x) = 0$$