كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الثانية**

المادة : فيزياء كمومية

المحاضرة : السابعة /نظري/د.أصف يوسف

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

2025

١٠

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

الفصل السادس
نظرية المؤثرات وظهور ميكانيك الكم
Operators Theory and the Appearance of Quantum Mechanic

يتعين كل ملحوظ فيزيائي، في المكانيك الكلاسيكي، بقيمته العددية في أية نقطة من الفراغ، وفي أية لحظة زمنية. وبالتالي توصف الملحوظات الفيزيائية في الميكانيك الكلاسيكي بتوابع للإحداثيات المكانية والزمانية، أي بعلاقات تربط أعداداً بمجموعة أعداد أخرى، وتكون وظيفة الميكانيك الكلاسيكي هي إيجاد مثل هذه العلاقات التابعية بين مختلف الملحوظات الفيزيائية.

يتميز مكان تواجد الجسيم في الميكانيك الكلاسيكي في أية لحظة زمنية بثلاثة أعداد، تسمى إحداثيات موضع الجسيم. وبالتالي فإنّ وظيفة الميكانيك الكلاسيكي تكمن في إيجاد الصيغة الرياضية التي تعبر عن إحداثيات موضع الجسيم بدلالة الزمن. أما في ميكانيك الكم فالمسألة تختلف عن ذلك، لأننا هنا نبحث عن احتمال وجود الجسيم في منطقة معينة من الفراغ، وذلك بحساب التابع الموجي. غير أنّ التابع الموجي لا يعطينا إمكانية حساب إحداثيات موضع تواجد الجسيم بدلالة الزمن. بل يعطينا إمكانية احتمال وجود هذه الإحداثيات ومن ثم حساب قيمها الوسطى. ينتج من ذلك أنّ الملحوظ الفيزيائي في ميكانيك الكم لا يتميز بقيمته العددية بل بالمؤثر الذي يوصف به هذا الملحوظ. وفي حالة معينة مفروضة، تكون القيمة العددية للملحوظ الفيزيائي على العموم، غير معينة، أمّا المؤثر، الذي يصف الملحوظ الفيزيائي فمعين تماماً.

1- المؤثر:

تسمى كل علاقة تحقق ترابطاً بين تابع وتابع آخر بمؤثر، ونرمز له عادةً بحرف تعلوه إشارة ^، مثل $\hat{L}$. فإذا كان المؤثر $\hat{L}$ يشير إلى العلاقة التي تربط التابع ψ_1 مع التابع ψ_2 نكتب رمزياً:

$$\hat{L}_1\psi_1 = \psi_2 \qquad (1)$$

1-1- المؤثرات الخطية:

بما أن هناك علاقات ربط مختلفة بين التوابع، لذلك من الطبيعي وجود مؤثرات مختلفة. وفي الميكانيك الكم، بغية تحقيق مبدأ انضمام الحالات، تستخدم المؤثرات الخطية. ونقول عن المؤثر $\hat{L}$ أنّه خطي إذا أثّر على التابع $(C_1\psi_1 + C_2\psi_2)$ (حيث ψ_1 و ψ_2 أي تابعين و C_1 و C_2 أي ثابتين) بالطريقة التالية:

$$\hat{L}\,(C_1\psi_1 + C_2\psi_2) = C_1\hat{L}\,\psi_1 + C_2\hat{L}\,\psi_2 \qquad (2)$$

ونلاحظ بسهولة أنّ المؤثرات التالية خطية:

$\hat{C}\,f(x) = Cf(x)$ مؤثر الضرب بالعدد C

$\hat{x}\,f(x) = xf(x)$ مؤثر الضرب بالمتحول x

$\frac{\hat{d}}{dx}f(x) = \frac{df(x)}{dx}$ المؤثر التفاضلي $\frac{d}{dx}$

كما نلاحظ أن المؤثرات التالية غير خطية:

- مؤثر الرفع إلى أس.
- مؤثر استخدام تابع مثلثي.

وتعدُّ مؤثرات التناظر من المؤثرات الهامة جداً والتي تلعب دوراً هاماً في ميكانيك الكم، نذكر منها:

$\hat{E}\,f(x) = f(x)$ المؤثر الواحدي.

$\hat{I}\, f(x) = f(-x)$ مؤثر الانقلاب.

$\hat{T}_a\, f(x) = f(x+a)$ مؤثر الإزاحة.

$\hat{C}_a$ مؤثر الدوران بزاوية $(2\pi/n)$.

$\hat{\sigma}_P$ مؤثر الانعكاس بالنسبة للمستوي P.

1-2- العمليات على المؤثرات:

- نقول عن المؤثر $\hat{C}$ إنّه يساوي مجموع المؤثرين $\hat{A}$ و $\hat{B}$، أي:

$$\hat{C} = \hat{A} + \hat{B}$$

إذا تحقق من أجل كل تابع ψ الشرط التالي:

$$\hat{C}\psi = \hat{A}\psi + \hat{B}\psi \qquad (3)$$

ينتج مما سبق أنّ جمع المؤثرات عملية تبديلية.

- نقول عن المؤثر $\hat{C}$ إنّه يساوي جداء المؤثرين $\hat{A}$ و $\hat{B}$، أي:

$$\hat{C} = \hat{A}.\hat{B}$$

إذا تحقق من أجل كل تابع ψ الشرط التالي:

$$\hat{C}\psi = \hat{A}(\hat{B}\psi) \qquad (4)$$

- إذا كان $\hat{L}$ مؤثر ما و λ عدد كيفي، فإنّ الجداء $\lambda\hat{L}$ هو عبارة عن مؤثر، إذا أثر على التابع ψ يساوي إلى أثر $\hat{L}$ في ψ مضروباً بـ λ أي:

$$(\lambda\hat{L})\psi = \lambda(\hat{L}\psi) \qquad (5)$$

- إنّ الخواص الجبرية لمجموع المؤثرات وفضلها تطابق تماماً الخواص الجبرية لمجموع الأعداد وفضلها، فيمكن جمع المركبات، وتغيير ترتيبها. لكن جداء المؤثرات يمكن أن تكون عملية غير تبديلية أي $\hat{A}\hat{B}$ يمكن أن يختلف عن $\hat{B}\hat{A}$.

1-3- مبادل مؤثران:

نستطيع من أجل أي مؤثرين $\hat{A}$ و $\hat{B}$ إيجاد الفرق $\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ وتحديده بواسطة:

$$[\hat{A},\hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \qquad (6)$$

نسمي المقدار $[\hat{A},\hat{B}]$ مبادل المؤثرين $\hat{A}$ و $\hat{B}$.

- نقول عن المؤثرين $\hat{A}$ و $\hat{B}$ إنهما تبادليان إذا حققا العلاقة:

$$\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$$

وهذا يعني أنّ مبادلهما يساوي الصفر أي أن:

$$[\hat{A},\hat{B}] = 0$$

ينتج من تعريف المبادل ما يلي:

(1) $[\hat{A},\hat{B}] = -[\hat{B},\hat{A}]$

(2) كل مؤثر تبادلي مع ذاته، أي: $[\hat{A},\hat{A}] = 0$

(3) $[(\hat{A}+\hat{B}),\hat{C}] = [\hat{A},\hat{C}] + [\hat{B},\hat{C}]$

(4) $[\hat{A},\hat{B}.\hat{C}] = [\hat{A},\hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A},\hat{C}]$

نستطيع توسيع جبر المؤثرات باستخدام فكرة تابع المؤثرات. مثل كثير الحدود المؤثري المعرّف بالعلاقة:

$$f(\hat{A}) = a_n\hat{A}^n + a_{n-1}\hat{A}^{n-1} + \ldots\ldots + a_n \qquad (7)$$

ومؤثر التابع الأسي بالعلاقة:

$$e^{\hat{A}} = 1 + \hat{A} + \frac{\hat{A}^2}{2!} + \frac{\hat{A}^3}{3!} + \ldots\ldots \qquad (8)$$

1-4- القيم الخاصة والتوابع الخاصة للمؤثرات الخطية:

إذا كان $\hat{L}$ مؤثر تفاضلي خطي، فإن المعادلة من الشكل:

$$\hat{L}\psi = 0 \qquad (9)$$

تسمى معادلة تفاضلية متجانسة.

إن أهم حالة للمعادلات المتجانسة هي عندما يكون المؤثر التفاضلي له الشكل $(\hat{L}-\lambda)$، حيث λ ثابت ما. والمعادلة التفاضلية في هذه الحالة لها الشكل:

$$\hat{L}\psi = \lambda\psi \qquad (10)$$

ويتطلب هذا أن يحقق التابع ψ شروط حدية معينة. نسمي التابع ψ الذي يحقق العلاقة (10) بالتابع الخاص، ونسمي الثابت λ بالقيمة الخاصة للمؤثر $\hat{L}$. فمثلاً التابع e^{ikx} تابع خاص للمؤثر التفاضلي (d/dx) و ik قيمة خاصة له لأنَّ:

$$\frac{d}{dx}e^{ikx} = ik\,e^{ikx}$$

يمكن أن يوجد من أجل المؤثر $\hat{L}$ العديد من التوابع الخاصة ψ_n التي يُوافق كل منها قيمة خاصة λ_n، عندئذٍ يكون:

$$\hat{L}\psi_n = \lambda_n\psi_n$$

الدليل n يُرقم هنا التابع الخاص والقيمة الخاصة.

إذا كان ψ_n تابع خاص، فإنَّ $c\psi_n$ أيضاً، الذي نحصل عليه بضرب ψ_n بأيّ عدد c، عبارة عن تابع خاص ينتمي إلى نفس القيمة الخاصة λ_n. إذا كانت القيمة الخاصة المعطاة توافق n من التوابع الخاصة المستقلة، فإننا نقول عن هذه القيمة الخاصة بأنها n – مرة متفسخة (متحللة أو متوالدة).

تتمتع المعادلة التفاضلية المتجانسة بالخاصة التالية: إذا كانت التوابع $\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_n$ حلول هذه المعادلة، فإنَّ أيَّ تركيب خطي لهذه الحلول هو حل أيضاً، أي:

$$\hat{L}\sum(C_n\psi_n) = \sum C_n\hat{L}\psi_n = 0 \qquad (11)$$

لأنه من أجل أي تابع ψ_n تتحقق العلاقة:

$$\hat{L}\psi_n = 0$$

والعوامل C_n عبارة عن مقادير ثابتة. يتم تشكيل التركيب الخطي للحلول فقط عندما تكون هذه الحلول عبارة عن توابع مستقلة خطياً. ونقول عن مجموعة من التوابع إنها مستقلة خطياً، عندما ينتج من المعادلة:

$$\sum(C_n\psi_n) = 0 \qquad (12)$$

أن:

$$C_1 = C_2 = \ldots\ldots = C_n = 0$$

تعريف:

نقول عن مجموعة التوابع المتعلقة بالمؤثر $\hat{L}$ إنها متعامدة في منطقة معينة V من الفراغ، إذا تحقق من أجل أي تابعين من هذه المجموعة، الشرط التالي في هذه المنطقة:

$$\int_V \psi_i^*\psi_j\,d\tau = a_j\delta_{ij} \qquad (13)$$

حيث a_j ثابت ما موجب، ψ_i^* تابع عقدي مرافق للتابع ψ_i و δ_{ij} رمز كرونيكر حيث:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & , \quad i \neq j \\ 1 & , \quad i = j \end{cases} \qquad (14)$$

إذا كان الثابت a_j يساوي الواحد، نقول عن مجموعة التوابع أنها منظمة أو إنها مجموعة مستنظمة. من أجل التوابع المنظمة $(a_j = 1)$ تتحقق العلاقة التالية:

$$\int_V \psi_i^*\psi_i\,d\tau = 1 \qquad (15)$$

إذا كانت جميع التوابع المحتواة في مجموعة ما متعامدة فيما بينها، فإننا نقول عن هذه المجموعة بأنها مجموعة توابع تامة. يمكن إثبات أن

التوابع المتعامدة فيما بينها والمختلفة عن الصفر تكون مستقلة خطياً.

إذا كان ψ_m يمثل جملة تامة من التوابع المتعامدة في المنطقة V، فإنّ أي تابع ψ في هذه المنطقة يمكن كتابته على شكل تركيب خطي بدلالة الجملة التامة ψ_m، أي:

$$\psi = \sum_m C_m \psi_m \qquad (16)$$

حيث C_m أعداد عقدية بالحالة العامة. يمكن أن نحصل على عوامل التوزع C_m، بضرب طرفي العلاقة (16) بـ ψ_n^* ومن ثم المكاملة على المنقطة V، فنجد:

$$\int_V \psi_n^* \psi \, d\tau = \int_V \sum_m C_m \psi_n^* \psi_m \, d\tau = \sum_m C_m \int_V \psi_n^* \psi_m \, d\tau$$
$$= \sum_m C_m \delta_{mn} = C_n$$

أي:

$$C_n = \int_V \psi_n^* \psi \, d\tau \qquad (17)$$

1-5- المؤثر الهرميتي (ذاتي الترافق):

إذا تحققت من أجل أي تابعين ψ_1 و ψ_2 في منطقة متغيرة V العلاقة التالية:

$$\int \psi_1^* \hat{L} \psi_2 d\tau = \int \psi_2 \hat{L}^* \psi_1^* d\tau \qquad (18)$$

أو بالشكل الرمزي:

$$(\psi_1, \hat{L}\psi_2) = (\hat{L}\psi_1, \psi_2)$$

فإننا نقول عن المؤثر $\hat{L}$ إنه هرميتي. نلاحظ أن المؤثرات التالية: الضرب بعدد حقيقي، الضرب بمتحول x، أو بالمتحول y أو بالمتحول z، المؤثر التفاضلي $\left(i\frac{d}{dx}\right)$ أو المؤثر $\left(i\hbar\frac{d}{dx}\right)$ جميعها مؤثرات هرميتية. أما

المؤثرات التفاضلية $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ و $\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)$ و $\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)$ فهي مؤثرات غير هرميتية.

إذا كان المؤثر $\hat{L}$ غير هرميتي، فإنه يمكن بناء مؤثر هرميتي من مرافقه $\hat{L}^+$ بالشكل التالي:

$$(\psi_1, \hat{L}\psi_2) = (\hat{L}^+\psi_1, \psi_2) \qquad (19)$$

المؤثرات الهرميتية تعدُّ مؤثرات ذاتية الترافق $\hat{L} = \hat{L}^+$.

نستطيع الآن أن نبرهن سلسلة من النظريات المتعلقة بالمؤثرات الهرميتية، نذكرها أهمها.

نظرية 1: القيم الخاصة للمؤثرات الهرميتية هي أعداد حقيقية.

البرهان:

نفرض أن التابع المنظم ψ هو تابع خاص للمؤثر الهرميتي $\hat{L}$ والمرفق بالقيمة الخاصة λ. عندئذٍ يكون:

$$\hat{L}\psi = \lambda\psi \qquad (20)$$

ومن أجل المرافقات العقدية يكون:

$$\hat{L}^*\psi^* = \lambda^*\psi^* \qquad (21)$$

نضرب طرفي العلاقة (20) بـ ψ^* وطرفي العلاقة (21) بـ ψ ثم نكامل كل من العلاقتين الناتجتين فنجد:

$$\int \psi^* \hat{L}\psi \, d\tau = \lambda \int \psi^* \psi \, d\tau = \lambda$$
$$\int \psi \hat{L}^* \psi^* \, d\tau = \lambda^* \int \psi \psi^* \, d\tau = \lambda^* \qquad (22)$$

وبما أن $\hat{L}$ مؤثر هرميتي لذلك فإن التكاملين في الطرف الأيسر من العلاقتين السابقيتن يجب أن يكونا متساويين ومنه $(\lambda = \lambda^*)$ وهذا يعني أن المقدار λ هو عدد حقيقي.

2- مبادئ أساسية في ميكانيك الكم:

كل مقدار ديناميكي، مثل الموضع، كمية الحركة، عزم كمية الحركة والطاقة...إلخ، يوافقه في ميكانيك الكم مؤثر هرميتي، تشكل توابعه الخاصة جملة تامة. تكون نتائج القياسات الممكنة للمقدار الفيزيائي الممثل بالمؤثر $\hat{L}$ قيم خاصة لهذا المؤثر $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ...)$ بينما يمكن الحصول بنتيجة قياس واحد على قيمة خاصة معينة فقط λ_m لهذا المؤثر.

إن المعادلة التي لها شكل معادلة شرودينغر (Schrödinger) المستقلة عن الزمن:

$$\hat{L}\psi = \lambda\psi \qquad (28)$$

تسمى معادلة القيم الخاصة؛ ψ يعني التابع الخاص للمؤثر $\hat{L}$.

عندما يكون تابع الحالة الذي يصف الجملة تابعاً خاصاً للمؤثر $\hat{L}$، فإننا نقول عن الجملة بإنها في حالة خاصة للمؤثر $\hat{L}$.

إذا كانت الجملة في حالة خاصة موصوفة بواسطة تابع خاص ψ_m، فإنه بنتيجة قياس المتحول L نحصل في كل مرة على قيمة خاصة λ_m مرتبطة مع التابع الخاص ψ_m.

إذا كانت الجملة بعد القياس موجودة في الحالة التي يمكن وصفها بأحد التوابع الخاصة $(\psi_1, \psi_2, \psi_3, ...)$، فإن التابع الموجي ψ الذي يصف حالة الجملة قبل القياس يكون تركيب خطي لهذه التوابع:

$$\psi = C_1\psi_1 + C_2\psi_2 + C_3\psi_3 + ...$$

حيث $(C_1, C_2, C_3, ...)$ عوامل عددية عقدية بشكل عام. إنّ الحالة التي تصف التابع الموجي ψ عبارة عن محصلة الحالات التي تصف التوابع ψ_1 و ψ_2 و ψ_3 وهكذا.

لنفرض أن الجملة قبل القياس توجد في حالة موصوفة بالتابع الموجي ψ. نقيس المتحول الديناميكي L المرتبط مع المؤثر $\hat{L}$. نكرر

نظرية 2: التوابع الخاصة ψ_1 و ψ_2 للمؤثر الهرميتي $\hat{L}$ المرفق بالقيم الخاصة المختلفة λ_1 و λ_2 متعامدة.

البرهان:

ψ_1 تابع خاص للمؤثر $\hat{L}$ مرفق بالقيمة الخاصة λ_1، لذلك فإن:

$$\hat{L}\psi_1 = \lambda_1\psi_1 \qquad (23)$$

ψ_2 تابع خاص للمؤثر $\hat{L}$ مرفق بالقيمة الخاصة λ_2، لذلك فإن:

$$\hat{L}\psi_2 = \lambda_2\psi_2 \qquad (24)$$

مع العلم أن $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$. نضرب طرفي العلاقة (23) بـ ψ_2^* ثم نكامل الطرفين:

$$\int\psi_2^*\hat{L}\psi_1\, d\tau = \lambda_1 \int\psi_1\psi_2^*\, d\tau \qquad (25)$$

نضرب طرفي العلاقة (24) بـ ψ_1^* ثم نكامل الطرفين أيضاً فنجد:

$$\int\psi_1^*\hat{L}\psi_2\, d\tau = \lambda_2 \int\psi_1^*\psi_2\, d\tau \qquad (26)$$

نأخذ المرافق العقدي لطرفي العلاقة (26):

$$\int\psi_1\hat{L}^*\psi_2^*\, d\tau = \lambda_2 \int\psi_1\psi_2^*\, d\tau \qquad (27)$$

من أجل المؤثرات الهرميتية يجب أن تكون التكاملات الناتجة في الطرف الأيسر من العلاقتين (25) و (27) متساوية، لذلك نطرح هاتين العلاقتين طرفاً من طرف نجد:

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\int\psi_1\psi_2^* d\tau = 0$$

لكن $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$ إذاً:

$$\int\psi_1\psi_2^* d\tau = 0$$

ومنه ψ_1 و ψ_2 متعامدان.

القياس عدة مرات، وفي كل مرة نتأكد من أنّ الجملة قبل القياس لها نفس الحالة ψ. إنّ كل قياس يعطي بشكل عام نتيجة ما مختلفة λ_m. نتساءل الآن ما هي القيمة الوسطى لنتائج قياسات المتحول L؟

لتكن $(\psi_1,\psi_2,\psi_3,.....)$ جملة متعامدة تامة من التوابع للمؤثر $\hat{L}$. يمكن كتابة التابع ψ على شكل تركيب خطي بالشكل:

$$\psi = C_1\psi_1 + C_2\psi_2 + ... + C_k\psi_k + ... = \sum_m C_m\psi_m \qquad (29)$$

ومن شرط تنظيم التابع:

$$\int \psi^*\psi \, d\tau = 1$$

تنتج العلاقة:

$$\sum_m |C_m|^2 = 1 \qquad (30)$$

إن قياس المتحول L يؤكد أن الجملة تصل إلى إحدى الحالات الخاصة مثل ψ_m، حيث يتم بنتيجة القياس الحصول على العدد λ_m، الذي هو قيمة خاصة مرتبطة مع ψ_m. بما أن عوامل التوزع C_m في العلاقة (29) تحدد مشاركة جميع التوابع الخاصة للمؤثر $\hat{L}$ في التابع ψ، لذلك يمكن القول إن احتمال نتيجة قياس الجملة الموجودة في الحالة ψ_x يساوي $|C_m|^2$. كما إن احتمال إحراز القيمة λ_m بنتيجة قياس المتغير L يساوي $|C_m|^2$.

لنحسب الآن القيمة الوسطى $<\lambda>$ للعديد من القياسات المتحول L. نستطيع كتابتها بالعلاقة التالية:

$$<\lambda> = \sum_m |C_m|^2 \lambda_m$$

وبما أن:

$$C_m = \int \psi_m^* \psi \, d\tau$$

و:

$$C_m^* = \int \psi_m \psi^* \, d\tau$$

إذاً:

$$<\lambda> = \sum_m |C_m|^2 \lambda_m = \sum_m C_m C_m^* \lambda_m = \sum_m C_m \lambda_m \int \psi_m \psi^* \, d\tau$$
$$= \sum_m C_m \int \lambda_m \psi_m \psi^* \, d\tau$$

بتغيير ترتيب التكامل والمجموع نجد:

$$\sum_m C_m \int \lambda_m \psi_m \psi^* \, d\tau = \sum_m C_m \int \psi^* \hat{L} \psi_m \, d\tau$$
$$= \int \psi^* \hat{L} \sum_m C_m \psi_m \, d\tau = \int \psi^* \hat{L} \psi \, d\tau$$

ومنه:

$$<\lambda> = \int \psi^* \hat{L} \psi \, d\tau \qquad (31)$$

وهي عبارة عن علاقة أساسية في ميكانيك الكم، التي تسمح بتحديد القيمة الوسطى $<\lambda>$ للمتحول L الموافق للمؤثر $\hat{L}$ للجملة المتوضعة في الحالة ψ. إذا كانت الحالة ψ حالة خاصة للمتحول L موصوفة بالتابع الخاص ψ_m للمؤثر $\hat{L}$، عندئذٍ فإن القيمة الوسطى للمتحول L تساوي λ_m، الذي ينتج مما يأتي:

$$<\lambda> = \int \psi_m^* \hat{L} \psi_m \, d\tau = \lambda_m \int \psi_m^* \psi_m \, d\tau = \lambda_m$$

لنفرض أننا نريد قياس المتحولين L_1 و L_2 بآنٍ واحد والموافقين للمؤثرين $\hat{L}_1$ و $\hat{L}_2$. يجب أن تصل الجملة نتيجة القياس المتزامن للمتحولين L_1 و L_2 إلى الحالة التي تعتبر حالة خاصة لكلا المؤثرين $\hat{L}_1$ و $\hat{L}_2$، وهذا ممكن فقط عندما يوجد ما يعرف بالتوابع الخاصة المشتركة للمؤثرين $\hat{L}_1$ و $\hat{L}_2$.

يسمى التابع ψ الذي يكون تابع خاص للمؤثر $\hat{L}_1$ المرفق بالقيمة الخاصة λ_1، وتابع خاص أيضاً للمؤثر $\hat{L}_2$ المرفق بالقيمة الخاصة λ_2، أي:

$$\hat{L}_1\psi = \lambda_1\psi$$
$$\hat{L}_2\psi = \lambda_2\psi$$

تابع خاص مشترك للمؤثرين $\hat{L}_1$ و $\hat{L}_2$. يجب أن نتذكر هنا أن التوابع ψ كتوابع خاصة للمؤثرات الموافقة للمتحول الديناميكي تشكل جملة تامة.

نظرية 3: إذا كان لمؤثرين جملة توابع خاصة مشتركة، فإنهما تبادليان مع بعضهما.

البرهان:

نبدأ من الفرض:

$$\hat{L}_1\psi = \lambda_1\psi$$
$$\hat{L}_2\psi = \lambda_2\psi$$

بضرب العلاقة العليا بـ λ_2 والسفلى بـ λ_1 فنجد:

$$\lambda_2\hat{L}_1\psi = \hat{L}_1\lambda_2\psi = \hat{L}_1\hat{L}_2\psi = \lambda_1\lambda_2\psi$$
$$\lambda_1\hat{L}_2\psi = \hat{L}_2\lambda_1\psi = \hat{L}_2\hat{L}_1\psi = \lambda_1\lambda_2\psi$$

أي:

$$\hat{L}_1\hat{L}_2\psi = \lambda_1\lambda_2\psi$$
$$\hat{L}_2\hat{L}_1\psi = \lambda_1\lambda_2\psi$$

بطرح العلاقتين السابقتين طرفاً من طرف نجد:

$$\left(\hat{L}_1\hat{L}_2 - \hat{L}_2\hat{L}_1\right)\psi = 0$$

أو:

$$[\hat{L}_1, \hat{L}_2] = 0$$

كما أن نظرية العكس لهذه النظرية صحيحة أيضاً.

نظرية 4: إذا كان مؤثران تبادليين فيما بينهما، فإنّ لهما جملة مشتركة من التوابع الخاصة.

البرهان:

نثبت صحة هذه النظرية فقط في الحالة عندما يكون للمؤثر $\hat{L}_1$ جملة توابع خاصة غير متفسخة. أي كل قيمة خاصة مثل λ_1 توافق تابع خاص واحد فقط ψ_1. لندرس مؤثر ثاني $\hat{L}_2$ يتبادل مع المؤثر $\hat{L}_1$. لدينا

$$\hat{L}_1\psi_1 = \lambda_1\psi_1$$

نؤثر بواسطة المؤثر $\hat{L}_2$ على المعادلة السابقة فنجد:

$$\hat{L}_2\hat{L}_1\psi_1 = \hat{L}_1\hat{L}_2\psi_1 = \lambda_1\hat{L}_2\psi_1$$

وهذا يعني أن $\hat{L}_2\psi_1$ تابع خاص للمؤثر $\hat{L}_1$ مرفق بالقيمة الخاصة λ_1. وبما أنه لا يوجد تفسخ، إذاً $\hat{L}_2\psi_1$ يجب أن يكون متناسب مع ψ_1، أي:

$$\hat{L}_2\psi_1 = \lambda_2\psi_1$$

وهذا يعني أن ψ_1 تابع خاص للمؤثر $\hat{L}_2$.

نكون قد توصلنا بهذه الطريقة إلى نتيجة هامة جداً وهي: يكون القياس المتزامن لمتحولين ديناميكيين ممكناً وفقط عندما يوافقهما مؤثران تبادليان.

3- تمثيل المتحولات الديناميكية بالمؤثرات:

تعدُّ الملحوظات الفيزيائية كالطاقة، كمية الحركة، عزم كمية الحركة، الموضع،... إلخ، متحولات ديناميكية، وتتحدد هذه الملحوظات في الميكانيك الكلاسيكي بأية لحظة زمنية بقيم عددية معينة، أما في ميكانيك الكم فإن هذه الملحوظات لا توصف بأعداد معينة، بل بمقادير رياضية أخرى هي المؤثرات. لذلك من المفيد هنا أن نتذكر بعض مسلمات ميكانيك الكم بشكلٍ مختصر لما لها من أهمية عظمى في تمثيل المتحولات الديناميكية بمؤثرات.

المسلمة الأولى: كل ملحوظ A محدد جيداً في الفيزياء مثل كمية الحركة، الطاقة، الكتلة، عزم كمية الحركة أو عدد الجزيئات يُمثل بمؤثر $\hat{A}$، بحيث نحصل بنتيجة قياس الملحوظ A على القيم λ التي تمثل القيم الخاصة للمؤثر $\hat{A}$، وتحقق العلاقة:

$$\hat{A}\psi = \lambda\psi$$

حيث ψ التابع الخاص للمؤثر $\hat{A}$ المرفق بالقيمة الخاصة λ.

المسلمة الثانية: نحصل على قيم عددية نتيجة قياس الملحوظ الفيزيائي A وتعدُّ القيم الخاصة للمؤثر $\hat{A}$، وبما أن هذه القيم الخاصة لا يمكن أن تكون سوى أعداد حقيقية لذلك فإنَّ المؤثرات $\hat{A}$ التي تمثل هذه الملحوظات يجب أن تكون ذاتية الترافق (هرميتية).

المسلمة الثالثة: لنفرض أن حالة الجسيم المتحرك تتحدد بالتابع ψ، ولـيكن $\hat{L}$ المؤثر الذي يمثل ملحوظاً معيناً لهذا الجسيم، و $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ..., \lambda_m)$ مجموعة القيم الخاصة لهذا لمؤثر. يتعين احتمال إيجاد القيم الخاصة λ_i عند القياس كما يلي:

لتكن ψ_m مجموعة تامة من التوابع الخاصة للمؤثر $\hat{L}$ بحيث يكون:

$$\hat{L}\psi_m = \lambda_m\psi_m$$

وبالتالي نستطيع كتابة التابع ψ المنظم وفق تركيب خطي للجملة التامة ψ_m بحيث يكون:

$$\psi = \sum_m C_m\psi_m$$

عندئذٍ فإن المسلمة الثالثة تنص على أنه إذا تواجدت الجملة في الحالة ψ، فإن احتمال الحصول على القيمة العددية λ_m، يساوي إلى:

$$|C_m|^2$$

ينتج من ذلك أنه إذا كان أحد التوابع الخاصة يتطابق مع التابع ψ الذي يصف حالة الجسيم، فإنَّ القيمة العددية للملحوظ تتطابق مع القيمة الخاصة للتابع الخاص.

3-1- مؤثر الموضع:

يتم انتخاب شكل مؤثرات الملحوظات الفزيائية بحيث تطابق النتائج التي تؤدي إليها مع التجربة. مع ملاحظة أن هذه المؤثرات يجب أن تكون هرميتية (ذاتية الترافق) كما وجدنا سابقاً. إن احتمال وجود الجسيم في النقطة x يتمثل بالمقدار $\psi^*(x)\psi(x)$ وتكون القيمة الوسطى للإحداثي x هي:

$$< x > = \int x\psi^*(x).\psi(x)\,dx = \int \psi^*(x).x.\psi(x)\,dx$$

بمقارنة هذه العلاقة مع العلاقة (31) نستنتج أن $\hat{x} = x$ أي تطبيق مؤثر الإحداثي $\hat{x}$ على تابع للإحداثي x يكافئ عملية ضرب هذالتابع بـ x.

3-2- مؤثر كمية الحركة ومؤثر الطاقة الكلية:

يمكن أن نصف تصرف الجسيم في ميكانيك الكم بالتابع الموجي $\psi(x,t)$، وبما أن هذا التابع مقدار غير مقاس لذلك يمكن أن يكون مقدار عقدي، وبالتالي يكتب بدلالة كمية حركة الجسيم P وطاقته الكلية E عندما يتحرك الجسيم على طول المحور x باتجاه القيم الموجبة، بالعلاقة التالية:

$$\psi(x,t) = A.e^{i(xP_x - Et)/\hbar} \qquad (32)$$

باشتقاق هذه العلاقة بالنسبة للمتحول x نجد:

$$\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x} = \frac{iP_x}{\hbar}\psi(x,t)$$

نستنتج من ذلك أن:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{iP_x}{\hbar}$$

أو:

$$\hat{P}_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x} \qquad (33)$$

وقياساً على ذلك نجد:

$$\hat{P}_y = -i\hbar\frac{\partial}{\partial y} \quad , \quad \hat{P}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial z}$$

باشتقاق العلاقة (32) بالنسبة للزمن، نجد:

$$\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{iE}{\hbar}\psi(x,t)$$

نستنتج من ذلك أن:

$$\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{iE}{\hbar}$$

أو:

$$\hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \qquad (34)$$

وهي عبارة عن مؤثر الطاقة الكلية.

بما أن كمية حركة الجسيم تكتب في فراغ ثلاثي الأبعـــاد $(x.y.z)$ بالشكل:

$$\vec{P} = P_x\vec{i} + P_y\vec{j} + P_z\vec{k}$$

حيث $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ أشعة الواحدة على المحاور الإحداثية $(x.y.z)$، لذلك يكون:

$$\hat{\vec{P}} = \hat{P}_x\vec{i} + \hat{P}_y\vec{j} + \hat{P}_z\vec{k}$$

وبالإسفادة من العلاقات (33) نجد:

$$\hat{\vec{P}} = -i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)$$

أو:

$$\hat{\vec{P}} = -i\hbar\,.\,\vec{\nabla} \qquad (35)$$

حيث:

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)$$

3-3- مؤثر عزم كمية الحركة:

لتحديد مؤثر عزم كمية الحركة ننطلق من التعريف الكلاسيكي لعزم كمية الحركة:

$$\vec{L} = \vec{r}\times\vec{P} \qquad (36)$$

حيث $\vec{r}$ يمثل شعاع الموضع و $\vec{P}$ شعاع كمية الحركة.

الجداء الشعاعي السابق يمكن كتابته عل شكل معين:

$$\vec{L} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ P_x & P_y & P_z \end{vmatrix} \qquad (37)$$

ومنه نجد مركبات عزم كمية الحركة المعروفة بالعلاقات التالية:

$$\begin{aligned} L_x &= yP_z - zP_y \\ L_y &= zP_x - xP_z \\ L_z &= xP_y - yP_x \end{aligned} \qquad (38)$$

وبالإستفادة من العلاقات (33)، فإن العلاقات (38) يمكن كتاتها على شـــكل مؤثرات كما يلي:

$$\begin{aligned} \hat{L}_x &= -i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial x} - z\frac{\partial}{\partial y}\right) \\ \hat{L}_y &= -i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right) \\ \hat{L}_z &= -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) \end{aligned} \qquad (39)$$

نستطيع الآن تحديد مؤثر عزم كمية الحركة الكلي بمتجه، مركباتـــه عبارة عن المؤثرات (39)، أي:

$$\hat{\vec{L}} = \hat{L}_x \vec{i} + \hat{L}_y \vec{j} + \hat{L}_z \vec{k} = -i\hbar \vec{r} \times \vec{\nabla} \qquad (40)$$

حيث $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ أشعة الواحدة على المحاور الإحداثية $(x.y.z)$. بالإضافة لذلك لدينا:

$$\hat{\vec{L}} . \hat{\vec{L}} = \hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2 \qquad (41)$$

التي توافق العلاقة العادية للجداء السلمي لمتجهين.

ترتبط مؤثرات مركبات عزم كمية الحركة بالعلاقات التالية الناتجة عن العلاقات (39) ومن تعريف مبادل مؤثرين انظر المثال (3):

$$\begin{aligned} \left[\hat{L}_x, \hat{L}_y\right] &= i\hbar \hat{L}_z \\ \left[\hat{L}_y, \hat{L}_z\right] &= i\hbar \hat{L}_x \\ \left[\hat{L}_z, \hat{L}_x\right] &= i\hbar \hat{L}_y \end{aligned} \qquad (42)$$

يمكن كتابة هذه العلاقات بشكل أكثر عمومية:

$$\hat{\vec{L}} \times \hat{\vec{L}} = i\hbar \hat{\vec{L}} \qquad (43)$$

ينتج من العلاقات (42) أن مركبات عزم كمية الحركة غير تبادلية مع بعضها، بينما تبادلية مع المقدار $\hat{L}^2$:

$$\left[\hat{L}^2, \hat{L}_x\right] = \left[\hat{L}^2, \hat{L}_y\right] = \left[\hat{L}^2, \hat{L}_z\right] = 0 \qquad (44)$$

كما ينتج من العلاقات (42) أنه يمكن تحديد مركبات عزم كمية الحركة الثلاث بآن واحد، حيث إنه ليس لمؤثراتها توابع خاصة مشتركة. يستثنى من ذلك التابع الخاص الموافق للقيم الخاصة:

$$\hat{L}_x = \hat{L}_y = \hat{L}_z = 0$$

لأن تطبيق أحد المؤثرات (42) على مثل هذه التوابع الخاصة هو ذاته. وهذا يعني أنه يمكن تحديد مركبات عزم كمية الحركة الثلاث بآن واحد فقط في الحالة الخاصة عندما تكون جميع هذه المركبات معدومة.

لنحاول الآن إيجاد مؤثرات مركبات عزم كمية الحركة بدلالة الإحداثيات الكروية (r, θ, φ)، التي ترتبط مع الإحداثيات الديكارتية (x, y, z) بالعلاقات التالية:

$$\begin{aligned} x &= r \sin\theta \cos\varphi \\ y &= r \sin\theta \sin\varphi \\ z &= r \cos\theta \end{aligned} \qquad (45)$$

عندئذٍ يكون:

$$\begin{aligned} \hat{L}_x &= i\hbar \left(\sin\varphi . \frac{\partial}{\partial \theta} + ctg\theta . \cos\varphi . \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\ \hat{L}_x &= i\hbar \left(-\cos\varphi . \frac{\partial}{\partial \theta} + ctg\theta . \sin\varphi . \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\ \hat{L}_x &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{aligned} \qquad (46)$$

و:

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin\theta} . \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta . \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} . \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \qquad (47)$$

نلاحظ أن المؤثرين $\hat{L}^2$ و $\hat{L}_z$ تبادليان [انظر الفقرة (4-3)]، وهذا يعني أنه يمكن تحديد مربع عزم كمية الحركة ومركبة عزم كمية الحركة بآنٍ واحد وفي أي اتجاه معطى.

إن معادلة القيمة الخاصة للمؤثر $\hat{L}_z$ لها الشكل:

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}\psi = L_z\psi$$

نعوض في هذه العلاقة:

$$\psi(r,\theta,\varphi) = f(r,\theta).\Phi(\varphi)$$

فنحصل على معادلة بدلالة $\Phi(\varphi)$ كما يلي:

$$-i\hbar\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = L_z\Phi$$

وحل هذه المعادلة هو:

$$\Phi(\varphi) = A.e^{\frac{i}{\hbar}L_z\varphi}$$

حيث A مقدار ثابت. يكون التابع $\Phi(\varphi)$ دورياً إذا كان:

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$$

ويحدث هذا، عندما تكون القيم الخاصة للمؤثر $\hat{L}_z$ مساوية إلى:

$$L_z = m\hbar$$

حيث:

$$m = 0,\pm1,\pm2,\pm3,..... \qquad (48)$$

ينتج من ذلك أن التوابع الخاصة للمؤثر $\hat{L}_z$ لها الشكل:

$$\Phi_m = A.e^{im\varphi} \qquad (49)$$

أو:

$$\psi(r,\theta,\varphi) = f(r,\theta).e^{im\varphi}$$

نلاحظ إذاً أن الإمكانيات الوحيدة لنتائج القياسات لأية مركبة عزم كمية الحركة تساوي الأعداد:

$$0,\pm\hbar,\pm2\hbar,.....$$

اعتماداً على العلاقة (47) فإن معادلة القيم الخاصة للمؤثر $\hat{L}^2$ لها الشكل التالي:

$$-\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}.\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta.\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}.\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]\psi = \Gamma\psi(r,\theta,\varphi)$$

حيث Γ القيم الخاصة للمؤثر $\hat{L}^2$.

نبدل:

$$\psi(r,\theta,\varphi) = R(r).Y(\theta,\varphi)$$

بالمعادلة السابقة، فنحصل على العلاقة التالية:

$$-\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}.\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta.\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}.\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}\right]\psi = \Gamma Y \qquad (50)$$

نستطيع الآن فصل المتحولات في المعادلة السابقة، بفرض أن التابع $Y(\theta,\varphi)$ يساوي جداء تابعين كل منهما تابع لمتحول واحد أي:

$$Y(\theta,\varphi) = \Theta(\theta).\Phi(\varphi)$$

بتبديل هذا الجداء في المعادلة (50) وتجميع الحدود المتعلقة بـ θ في الطرف الأيسر والحدود المتعلقة بـ φ في الطرف الأيمن، نجد:

$$\frac{\sin\theta}{\Theta}.\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta.\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)+\Gamma\sin^2\theta = -\frac{1}{\Phi}.\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}$$

نلاحظ أن الطرف الأيسر من هذه العلاقة يتعلق فقط بالمقدار θ بينما الطرف الأيمن منها يتعلق فقط بالمقدار φ، لذلك فإن هذه المعادلة تتحقق فقط إذا كان كلا الطرفين يساوي مقدار ثابت، نفرض أن هذا الثابت يساوي m^2. أي:

$$-\frac{1}{\Phi}.\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} = m^2$$

$$\frac{\sin\theta}{\Theta}.\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta.\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)+\Gamma\sin^2\theta = m^2 \qquad (51)$$

إن حل المعادلة التفاضلية الأولى هو التابع $\Phi = A.e^{im\varphi}$ الممثل بالعلاقة (49)، والذي يتطلب بطريقة مشابهة لما سبق كي يكون دوري يجب أن يتحقق الشرط (48):

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...$$

يجب حل المعادلة الثانية (51) مع الأخذ بعين الاعتبار الشرط (48). وهي ما تسمى بمعادلات التوابع الكروية، التي لها حل مستمر ودوري في كامل مجال تغير الزاوية θ، عندما وفقط عندما يتحقق الشرط: القيم الخاصة للمؤثر $\hat{L}^2$ [انظر العمادلة (50)] تساوي:

$$\Gamma = l(l+1)\hbar^2 \qquad (52)$$

حيث $l = 0,1,2,.....$، وبنفس الوقت يجب أن يتحقق الشرط $|m| \le l$.

يكتب حل المعادلة الثانية (51) على الشكل:

$$\Theta_{lm} = A_1 \sin^m \theta . P_l^{|m|}.(\cos\theta) \qquad (53)$$
$$l = 0,1,2,..... \quad , \quad m = -l, -l+1, ...0, ..., l-1, l$$

حيث $P_l^{|m|}.(\cos\theta)$ تابع لوجندر (legendre) من الدرجة l والمرتبة m.

الحل العام للمعادلة (50) المتعلق بالقيم الخاصة لمؤثر مربع عزم كمية الحركة له الشكل التالي:

$$Y_{lm}(\theta,\varphi) = \Theta_{lm}.\Phi_m(\varphi) = B.\sin^m\theta.P_l^{|m|}.(\cos\theta)e^{im\varphi} \qquad (54)$$

بتطبيق المؤثر $\hat{L}_z$ على التابع Y_{lm} نجد:

$$\hat{L}_z.Y_{lm} = i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}Y_{lm} = m\hbar Y_{lm} \qquad (55)$$

نلاحظ أن التابع Y_{lm} عبارة عن تابع خاص لكلا المؤثرين $\hat{L}^2$ و $\hat{L}_z$. لذلك فإن التابع Y_{lm} يصف حالة الجزيئة، التي عزم كمية حركتها يساوي:

$$L = \hbar\sqrt{l(l+1)}$$

ومركبته على اتجاه المحور z تساوي $m\hbar$.

يسمى العدد الكمي l بالعدد الكمي المداري، بينما m العدد الكمي المغناطيسي. من أجل قيم l المعطاة تكون قيم العدد الكمي المغناطيسي $(0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm l)$ وهذا يعني $(2l+1)$ قيمة. وبالتالي من أجل كل قيمة خاصة $l(l+1)\hbar^2$ للمؤثر $\hat{L}^2$ هناك $(2l+1)$ من التوابع الخاصة Y_{lm}. إذاً القيم الخاصة هذه تكون $(2l+1)$ مرة متفسخة.

4- مبدأ عدم التعيين:

يدعى التابع ψ الذي ذكرناه في معادلة شرودينغر بالتابع الموجي، ويعدُّ تابع رياضي غير قابل للقياس، لذلك يمكن أن يكون مقدار عقدي لا يتمتع بمعنى فيزيائي مباشر، كما أنه لا يعدُّ موجة في المكان، وبالتالي فإنه يصف حركة الجسيمات الميكروسكوبية وصفاً احتمالياً. أي يمكن التنبؤ فقط عن احتمال تواجد الجسيم في لحظة زمنية معينة بمنطقة معينة من المكان. ولإيضاح المعنى الفيزيائي للتابع ψ يجب أن نأخذ بعين الاعتبار الطبيعة الازدواجية للجسيمات المادية.

تتناسب شدة الموجة الضوئية في أية نقطة من الفراغ مع مربع التابع الموجي ψ، أي مع كثافة عدد الفوتونات. وبالتالي فإن ψ^2 يجب أن يتناسب مع كثافة عدد الجسيمات. وبما أن كثافة الجسيمات في عنصر حجمي $d\tau$ مفروض تساوي كمية الجسيمات كلها في احتمال تواجد الجسيم الواحد في الحجم المعتبر $d\tau$. إذاً التابع $\psi^2(\vec{r})$ ينبغي أن يتناسب مع كثافة احتمال تواجد الجسيم بجوار النقطة الموافقة (أي في الحجم $d\tau$)، التي تتميز بنصف القطر المتجه $\vec{r}$. وبما أن التابع ψ عقدي في الحالة العامة، وكثافة الاحتمال مقدار حقيقي لذلك فإنَّ المقدار:

$$|\psi|^2 d\tau = \psi^*(\vec{r}).\psi(\vec{r}).d\tau$$

يتناسب مع كثافة احتمال تواجد الجسيم في الحجم $d\tau$، بجوار النقطة التي نصف قطرها المتجه $\vec{r}$، وبالتالي، فإن المقدار:

$$|\psi|^2 = \psi^*(\vec{r}).\psi(\vec{r})$$

يتناسب مع كثافة احتمال تواجد الجسيم في النقطة $\vec{r}$. وبما أن المقدار $\psi^*\psi\, d\tau$ يعبر عن احتمال تواجد الجسيم في عنصر الحجم $d\tau$، لذلك فإن:

$$\int \psi^*\psi\, d\tau = 1 \qquad (56)$$

وتعني هذه العلاقة أن الجسيم موجود حتماً في الحجم الذي يجري فيه التكامل. وبدون تحديد، يمكن اعتبار التكامل محدداً في المكان كله، وأن ψ معدوم في كل مكان حيث الجسيم، بدون شك غير موجود.

ليكن $\hat{P}_x$ مؤثر مركبة كمية حركة الجسيم وفق المحور x، وليكن $\hat{x}$ مؤثر الموضع، عندئذٍ يكون:

$$\left[\hat{P}_x,\hat{x}\right]\psi = (\hat{P}_x\hat{x} - \hat{x}\hat{P}_x)\psi = \hat{P}_x(\hat{x}\psi) - \hat{x}(\hat{P}_x\psi)$$

$$= -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}(x\psi) - x(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\psi)$$

$$= -i\hbar\psi$$

نستنتج من ذلك أن:

$$\left[\hat{P}_x,\hat{x}\right] = \left[\hat{P}_y,\hat{y}\right] = \left[\hat{P}_z,\hat{z}\right] = -i\hbar \qquad (57)$$

كما نلاحظ أيضاً:

$$\left[\hat{P}_x,\hat{y}\right] = (\hat{P}_x\hat{y} - \hat{y}\hat{P}_x)\psi = \hat{P}_x(\hat{y}\psi) - \hat{y}(\hat{P}_x\psi)$$

$$= -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}(y\psi) - y(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\psi)$$

$$= 0$$

ومنه نجد:

$$\left[\hat{P}_x,\hat{y}\right] = \left[\hat{P}_x,\hat{z}\right] = \left[\hat{P}_y,\hat{z}\right] = \left[\hat{P}_y,\hat{x}\right] = \left[\hat{P}_z,\hat{x}\right] = \left[\hat{P}_z,\hat{y}\right] = 0$$

تعني العلاقات (57) تعذر الحصول على فاصلة وكمية حركة جسيم في آن واحد، وبالتالي تعذر الحصول على قيم معينة لهما نتيجة قياسهما. عندما نقيس بشكل متزامن فاصلة وكمية حركة جسيم، فإننا نحصل على قيمتين منحرفتين عن القيمة الوسطى لكل منهما.

لتكن $< x >$ القيمة الوسطى لفاصلة الجسيم ولتكن $< P_x >$ القيمة الوسطى لكمية حركته، وبفرض Δx عدم تعيين الموضع و ΔP_x عدم تعيين كمية الحركة وفق المحور x، عندئذٍ نجد:

$$< (\Delta x)^2 > = < x^2 > - (< x >)^2 \qquad (58)$$

$$< (\Delta P_x)^2 > = < P_x^2 > - (< P_x >)^2 \qquad (59)$$

نختار للسهولة جملة إحداثيات جديدة يكون من أجلها:

$$< x > = < P_x > = 0$$

وبالتالي نجد:

$$< (\Delta x)^2 > = < x^2 > = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x).x^2\psi(x)\,dx \qquad (60)$$

و:

$$< (\Delta P_x)^2 > = < P_x^2 > = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x).\hat{P}_x^2\,\psi(x)\,dx$$

$$= -\hbar^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x).\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2}\,dx \qquad (61)$$

لندرس الآن التكامل التالي:

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{d\psi(x)}{dx} + x\lambda\psi(x)\right|^2 dx \qquad (62)$$

مع ملاحظة أن هذا التكامل معين وموجب وتابع للمتحول الحقيقي λ، ونستطيع حسابه كما يلي:

$$I(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{d\psi^*(x)}{dx}+x\lambda\psi^*(x)\right]\left[\frac{d\psi(x)}{dx}+x\lambda\psi(x)\right]dx$$

$$=\lambda^2\int_{-\infty}^{+\infty}d\psi^*(x).x^2.\psi(x)dx+$$

$$+\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}x\left[\frac{d\psi^*(x)}{dx}+\psi^*(x)\frac{d\psi(x)}{dx}\right]dx$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\psi^*(x)}{dx}.\frac{d\psi(x)}{dx}dx$$

$$=\lambda^2\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*(x).x^2.\psi(x)dx+\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}x\,d\left[\psi^*(x).\psi(x)\right]-$$

$$-\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*(x)\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}dx$$

وبملاحظة العلاقتين (60) و (61) وحساب قيمة التكامل الأوسط بطريقة التجزئة نجد:

$$I(\lambda)=\lambda^2<(\Delta x)^2>-\lambda\frac{<(\Delta P_x)^2>}{\hbar^2} \qquad (63)$$

يتضح من ذلك أنّ $I(\lambda)$ تابع صحيح من الدرجة الثانية بالنسبة للمتحول الحقيقي λ:

$$I(\lambda)=A\lambda^2+B\lambda+C$$

وبما أن التابع $I(\lambda)$ معين وموجب أي $I(\lambda)\geq 0$، وهذا يتحقق عندما $B^2-4AC\leq 0$ أو $4AC\geq B^2$ ومنه نجد:

$$4<(\Delta x)^2>.\frac{<(\Delta P_x)^2>}{\hbar^2}\geq 1$$

أو:

$$\sqrt{<(\Delta x)^2>}.\sqrt{<(\Delta P_x)^2>}\geq\frac{\hbar}{2} \qquad (64)$$

وتعني هذه العلاقة أنه لا يمكن أن ينعدم المقدارين $<(\Delta x)^2>$ و $<(\Delta P_x)^2>$ في آن واحد، وبالتالي فإنه يتعذر قياس موضع جسيم وكمية حركته بآن واحد وبدقة مطلقة. وبما أن Δx و ΔP_x هما الجذران التربعيان لوسطي مربع الانحراف لذلك فإن العلاقة السابقة تُكتب بالشكل التالي:

$$\Delta x.\Delta P_x\geq\frac{\hbar}{2} \qquad (65)$$

وهي نفس العلاقة (25) التي سبق واستنتجناها في الفصل الثاني.

4-1- عدم تعيين مقدارين فيزيائيين:

ليكن L و M مقدارين فيزيائيين، مؤثراهما على الترتيب $\hat{L}$ و $\hat{M}$ ومبادلهما $\left[\hat{L},\hat{M}\right]$ يُعطى بالعلاقة التالية:

$$\left[\hat{L},\hat{M}\right]=i\hat{N} \qquad (66)$$

حيث $\hat{N}$ مؤثر هرميتي. ولتكن $<(\Delta L)^2>$ و $<(\Delta M)^2>$ القيمة الوسطى لمربع الانحراف لكل من المقدارين الفيزيائيين على الترتيب، عندئذٍ نجد:

$$<(\Delta L)^2>=<(L-<L>)^2>$$
$$<(\Delta M)^2>=<(M-<M>)^2> \qquad (67)$$

ولنفرض أيضاً أن:

$$\Delta\hat{L}=\hat{L}-<\hat{L}>\ ,\quad \Delta\hat{M}=\hat{M}-<\hat{M}> \qquad (68)$$

لندرس الآن التكامل التالي:

$$J(\lambda)=\int\left|(\lambda\Delta\hat{L}-i\Delta\hat{M})\psi\right|^2 d\tau \qquad (69)$$

مع الملاحظة أن $J(\lambda)$ تابع معين وموجب بالنسبة للمتحول الحقيقي λ و $\Delta\hat{L}$ و $\Delta\hat{M}$ مؤثرين هرميتيين، لذلك نجد:

$$J(\lambda)=\int\left[(\lambda\Delta\hat{L}-i\Delta\hat{M})\psi\right]^*.\left[(\lambda\Delta\hat{L}-i\Delta\hat{M})\psi\right]d\tau$$

$$=\int(\lambda\Delta\hat{L}^*+i\Delta\hat{M}^*)\psi^*.(\lambda\Delta\hat{L}-i\Delta\hat{M})\psi\,d\tau$$

$$=\int\psi^*(\lambda\Delta\hat{L}+i\Delta\hat{M}).(\lambda\Delta\hat{L}-i\Delta\hat{M})\psi\,d\tau$$

$$=\lambda^2\int\psi^*(\Delta\hat{L})^2\psi\,d\tau-i\lambda\int\psi^*\left[\Delta\hat{L},\Delta\hat{M}\right]\psi\,d\tau+$$

$$+\int\psi^*(\Delta\hat{M})^2\psi\,d\tau$$

$$=\lambda^2<(\Delta\hat{L})^2>-i\lambda<\left[\Delta\hat{L},\Delta\hat{M}\right]>+<(\Delta\hat{M})^2>$$

$$=A\lambda^2+B\lambda+C$$

حيث $A=<(\Delta\hat{L})^2>$ و $B=-i\lambda<\left[\Delta\hat{L},\Delta\hat{M}\right]>$ و $C=<(\Delta\hat{M})^2>$. وبما أن:

$$\left[\Delta\hat{L},\Delta\hat{M}\right]=\left[\hat{L},\hat{M}\right]=i\hat{N}$$

والشرط $J(\lambda)\geq 0$ يتحقق عندما:

$$4AC\geq B^2 \quad \text{أو} \quad B^2-4AC\leq 0$$

ومنه نجد أن:

$$\sqrt{<(\Delta\hat{L})^2>}.\sqrt{<(\Delta\hat{M})^2>}\geq\frac{1}{2}\left|<\hat{N}>\right|$$

أو بعبارة أبسط:

$$\Delta\hat{L}.\Delta\hat{M}\geq\frac{1}{2}\left|<\hat{N}>\right| \qquad (70)$$

يتضح من ذلك أن علاقة عدم التعيين بين مقدارين فيزيائيين ليست إلا تعبيراً رياضياً للطبيعة الازدواجية للجسيمات العادية. كما أنها تعين تماماً قاعدة التبادل بين المقدارين الفيزيائيين، لأنه إذا كان مؤثرا المقدارين تبادليين فإنهما يتمتعان بقيمتين معينتين، لأنَّ جداء عدم تعيين كل منهما في الآخر قد ينعدم بآن واحد.

4-2- علاقة عدم تعيين الطاقة:

يُعطى مؤثر الطاقة الكلية لجسيم بالعلاقة التالية:

$$\hat{E}=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$$

كما أن مؤثر الزمن $\hat{t}=t$ وبالتالي نستطيع حساب المبادل $\left[\hat{E},\hat{t}\right]$ كما يلي:

$$\left[\hat{E},\hat{t}\right]\psi=\left(\hat{E}\hat{t}-\hat{t}\hat{E}\right)\psi=\hat{E}\left(\hat{t}\psi\right)-\hat{t}\left(\hat{E}\psi\right)$$

$$=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}(t\psi)-t(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi)$$

$$=i\hbar\psi$$

نستنتج من ذلك أن:

$$\left[\Delta\hat{E},\Delta\hat{t}\right]=i\hbar \quad \text{و} \quad \left[\hat{E},\hat{t}\right]=i\hbar$$

نبدل الآن في العلاقة (70) ما يلي:

$$\Delta\hat{L}=\Delta\hat{E}\ ,\ \Delta\hat{M}=\Delta\hat{t}\ ,\ \hat{N}=\hbar$$

فنجد:

$$\Delta\hat{E}.\Delta\hat{t} \geq \frac{\hbar}{2}$$

حيث تُكتب علاقة عدم التعيين عادة بالشكل التالي:

$$\Delta E.\Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \qquad (71)$$

وهي نفس العلاقة (26) الواردة في الفصل الثاني.

5- الهاملتوني $\hat{H}$:

وجدنا أن معادلة شرودينغر المستقلة عن الزمن في فراغ أحادي البعد لها الشكل التالي:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}.\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+V(x)\psi(x)=E\psi(x)$$

وفي فراغ ثلاثي الأبعاد تصبح كما يلي:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}.\nabla^2\psi(x,y,z)+V(x,y,z)\psi(x,y,z)=E\psi(x,y,z)$$

أو:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}.\nabla^2+V(x,y,z)\right]\psi(x,y,z)=E\psi(x,y,z) \qquad (72)$$

ونلاحظ أن هذه العلاقة شبيهة تماماً بالعلاقة:

$$\hat{L}\psi=\lambda\psi$$

لذلك نفرض أن:

$$\hat{H}=-\frac{\hbar^2}{2m}.\nabla^2+V(x,y,z) \qquad (73)$$

نسمي $\hat{H}$ مؤثر هاملتون، والعلاقة (72) تأخذ عندئذ الشكل التالي:

$$\hat{H}\psi=E\psi$$

ونلاحظ أن ψ تابع خاص للمؤثر $\hat{H}$ المرفق بالقيمة الخاصة E.

6- تغير المتحولات الديناميكية مع الزمن:

تُعطى القيمة الوسطى للمتحول الديناميكي L بالعلاقة (31) التالية:

$$<L>=\int\psi^*\hat{L}\psi\,d\tau \qquad (74)$$

نشتق طرفي العلاقة (74) بالنسبة للزمن:

$$\frac{d}{dt}<L>=\int\frac{\partial\psi^*}{\partial t}.\hat{L}\psi\,d\tau+\int\psi^*\frac{\partial\hat{L}}{\partial t}.\psi\,d\tau+\int\psi^*\hat{L}\frac{\partial\psi}{\partial t}d\tau \qquad (75)$$

ومن أجل الحركة الحرة يكون لدينا:

$$\hat{E}=\hat{H}=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$$

ومنه نجد:

$$\hat{H}\psi=i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} \quad , \quad \hat{H}^*\psi^*=-i\hbar\frac{\partial\psi^*}{\partial t}$$

نبدل هذا في العبارة (75) فنحصل على العلاقة التالية:

$$\frac{d}{dt}<L>=\frac{i}{\hbar}\int(\hat{H}^*\psi^*)(\hat{L}\psi)\,d\tau+\int\psi^*\frac{\partial\hat{L}}{\partial t}\psi\,d\tau-\frac{i}{\hbar}\int\psi^*\hat{L}\hat{H}\psi\,d\tau$$

وبما أن المؤثر $\hat{H}$ هرميتي لذلك فإن:

$$\int(\hat{H}^*\psi^*)(\hat{L}\psi)\,d\tau=\int(\hat{L}\psi)(\hat{H}^*\psi^*)\,d\tau=\int\psi^*\hat{H}\hat{L}\psi\,d\tau$$

نبدل ذلك في العبارة السابقة:

$$\frac{d}{dt}<L>=\frac{i}{\hbar}\int\psi^*\hat{H}\hat{L}\psi\,d\tau-\frac{i}{\hbar}\int\psi^*\hat{L}\hat{H}\psi\,d\tau+\int\psi^*\frac{\partial\hat{L}}{\partial t}\psi\,d\tau$$

أو:

$$\frac{d}{dt}<L>=\frac{i}{\hbar}\int\psi^{*}\left[\frac{\partial\hat{L}}{\partial t}+\frac{i}{\hbar}(\hat{H}\hat{L}-\hat{L}\hat{H})\right]\psi\,d\tau \qquad (76)$$

يبدو من هذه العلاقة أن مشتق القيمة الوسطى لمتحول ديناميكي بالنسبة للزمن يساوي القيمة الوسطى لمؤثر ما. ومن الطبيعي أن يكون هذا المؤثر هو مشتق المؤثر $\hat{L}$ الممثل للمتحول الديناميكي بالنسبة للزمن أي:

$$\frac{d\hat{L}}{dt}=\frac{\partial\hat{L}}{\partial t}+\frac{i}{\hbar}(\hat{H}\hat{L}-\hat{L}\hat{H})$$

أو:

$$\frac{d\hat{L}}{dt}=\frac{\partial\hat{L}}{\partial t}+\left[\hat{H},\hat{L}\right] \qquad (77)$$

حيث:

$$\left[\hat{H},\hat{L}\right]=\frac{i}{\hbar}(\hat{H}\hat{L}-\hat{L}\hat{H}) \qquad (78)$$

الذي يدعى معترضتا بواسون (Poisson) الكمومية للمؤثرين $\hat{H}$ و $\hat{L}$.

إذا كان المؤثر $\hat{L}$ لا يتعلق بالزمن بشكل ظاهر، فإنّ العلاقة (77) تأخذ الشكل التالي:

$$\frac{d\hat{L}}{dt}=\left[\hat{H},\hat{L}\right] \qquad (79)$$

وبحالة خاصة إذا كان المؤثر $\hat{H}$ هو مؤثر هاملتون المعطى بالعلاقة (73)، فإن المعادلة (79) تعين قانون حركة المتحول الديناميكي الموافق مع الزمن، إذا عتبرنا أنّ المتحولات الديناميكية تمثل هنا موضع وكمية حركة الجسيم، حصلنا على المعادلة الكمومية للحركة بالشكل الهاملتوني:

$$\frac{d\hat{x}}{dt}=\left[\hat{H},\hat{x}\right]$$
$$\frac{d\hat{P}_x}{dt}=\left[\hat{H},\hat{P}_x\right] \qquad (80)$$

إذا كان المؤثر $\hat{L}$ تبادلي مع الهاملتوني $\hat{H}$، أي $\left[\hat{H},\hat{L}\right]=0$، وبالتالي $\left(\frac{d\hat{L}}{dt}=0\right)$، وفي هذه الحالة لا تتغير القيمة الوسطى $<L>$ مع الزمن لأن:

$$\frac{d}{dt}<L>=0$$

وهذا يعني أنّ القيمة الوسطى للمتحول الديناميكي ثابتة أثناء الحركة.

لنحسب الآن معترضتي بواسون $\left[\hat{H},\hat{x}\right]$ و $\left[\hat{H},\hat{P}_x\right]$ مع الأخذ بعين الاعتبار أن مؤثر الموضع $\hat{x}$ تبادلي مع مؤثر الطاقة الكامنة $\hat{V}$ الوارد في عبارة مؤثر هاملتون، كما أنه تبادلي مع كل مركبات مؤثر كمية الحركة، باستثناء المركبة $\hat{P}_x$.

من السهولة ملاحظة أن:

$$\left[\hat{x},\hat{P}_x\right]=i\hbar \quad , \quad \left[\hat{x},\hat{P}_y\right]=0 \quad , \quad \left[\hat{x},\hat{P}_z\right]=0$$

لذلك فإن:

$$\left[\hat{H},\hat{x}\right]=\frac{i}{\hbar}(\hat{H}\hat{x}-\hat{x}\hat{H})=\frac{i}{2m\hbar}(\hat{P}_x^2\hat{x}-\hat{x}\hat{P}_x^2) \qquad (81)$$

وبما أن:

$$\hat{x}\hat{P}_x-\hat{P}_x\hat{x}=i\hbar\Rightarrow\hat{x}\hat{P}_x=\hat{P}_x\hat{x}+i\hbar$$

ينتج من ذلك أن:

$$\hat{x}\hat{P}_x^2 = (\hat{x}\hat{P}_x)\hat{P}_x = (\hat{P}_x.\hat{x} + i\hbar)\hat{P}_x = \hat{P}_x(\hat{x}\hat{P}_x) + i\hbar\hat{P}_x$$
$$= \hat{P}_x(\hat{P}_x\hat{x} + i\hbar) + i\hbar\hat{P}_x = \hat{P}_x^2.\hat{x} + i\hbar\hat{P}_x + i\hbar\hat{P}_x$$
$$= \hat{P}_x^2.\hat{x} + 2i\hbar\hat{P}_x$$

نبدل ذلك في العلاقة (81)، فنجد:

$$\left[\hat{H},\hat{x}\right] = \frac{i}{2m\hbar}(\hat{P}_x^2.\hat{x} - \hat{P}_x^2.\hat{x} - 2i\hbar\hat{P}_x)$$

وبالتالي:

$$\left[\hat{H},\hat{x}\right] = \frac{\hat{P}_x}{m} \qquad (82)$$

وبملاحظة العلاقة (80)، ينتج:

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = \left[\hat{H},\hat{x}\right] = \frac{\hat{P}_x}{m} \qquad (83)$$

وتعني هذه العلاقة أنَّ مشتق مؤثر الموضع $\hat{x}$ يطابق مؤثر السرعة $\hat{v}$.

يمكن أن نلاحظ بسهولة أنَّ المؤثر $\hat{P}_x$ تبادلي مع مؤثر الطاقة الحركية، لذلك نجد:

$$\left[\hat{H},\hat{P}_x\right] = \frac{i}{\hbar}(\hat{H}\hat{P}_x - \hat{P}_x\hat{H}) = \frac{i}{\hbar}(\hat{V}\hat{P}_x - \hat{P}_x\hat{V}) \qquad (84)$$

لنحسب الان قيمة المبادل $\left[\hat{V},\hat{P}_x\right]$ حيث $\hat{V}$ مؤثر الطاقة الكامنة:

$$\left[\hat{V},\hat{P}_x\right]\psi = (\hat{V}\hat{P}_x - \hat{P}_x\hat{V})\psi = \hat{V}(\hat{P}_x\psi) - \hat{P}_x(\hat{V}\psi)$$
$$= \hat{V}\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\psi\right) + i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\left(\hat{V}\psi\right)$$
$$= i\hbar\psi\frac{\partial\hat{V}}{\partial x}$$

ينتج من ذلك أن:

$$\left[\hat{V},\hat{P}_x\right] = i\hbar\frac{\partial\hat{V}}{\partial x}$$

نبدل في العبارة (84)، فنجد:

$$\left[\hat{H},\hat{P}_x\right] = \frac{i}{\hbar}.i\hbar\frac{\partial\hat{V}}{\partial x}$$

أو:

$$\left[\hat{H},\hat{P}_x\right] = -\frac{\partial\hat{V}}{\partial x}$$

وبملاحظة العلاقة (80)، ينتج:

$$\frac{d\hat{P}_x}{dt} = \left[\hat{H},\hat{P}_x\right] = -\frac{\partial\hat{V}}{\partial x} \qquad (85)$$

وبما أن المؤثر $\left(-\frac{\partial\hat{V}}{\partial x}\right)$ يساوي مؤثر مسقط القوة F على المحور x، أي:

$$\hat{F}_x = \left(-\frac{\partial\hat{V}}{\partial x}\right)$$

لذلك فإنَّ العلاقة (85) تأخذ الشكل:

$$\frac{d\hat{P}_x}{dt} = \hat{F}_x \qquad (86)$$

وهذا يعني أنّ مؤثر مشتق كمية حركة جسيم يساوي مؤثر القوة المؤثرة في هذا الجسيم. إذا أخذنا بعين الاعتبار العلاقة (76) و (83) و (85)، نجد:

$$\frac{d}{dt}<x>=\frac{1}{m}<P_x> \qquad (87)$$

و:

$$\frac{d}{dt}<P_x>=-<\frac{\partial V}{\partial x}>=<F_x> \qquad (88)$$

نشتق العلاقة (87) بالنسبة للزمن، فنجد:

$$\frac{d^2}{dt^2}<x>=\frac{1}{m}.\frac{d}{dt}<P_x> \qquad (89)$$

نبدل العلاقة (88) في العلاقة (89):

$$\frac{d^2}{dt^2}<x>=\frac{1}{m}<F_x>$$

أو:

$$<F_x>=m\frac{d^2}{dt^2}<x>$$

نستنتج من العلاقات السابقة أنّ القيم الوسطى لموضع وكمية حركة جسيم والقوة المؤثرة فيه ترتبط مع بعضها البعض بعلاقات مشابهة تماماً للعلاقات التي ترتبط بها في الميكانيك الكلاسيكي.

7- مؤثرات الخلق والفناء:

7-1- مؤثر بوزي (Bose):

لنفرض أن التوابع $\psi_n(x)$ تؤلف مجموعة تامة معينة من التوابع المستقلة عن بعضها، وليكن $\hat{B}^+$ المؤثر المرافق للمؤثر $\hat{B}$. نعرّف المؤثر