كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الاولى**

المادة : تحليل رياضي٢

المحاضرة : السادسة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

1- حساب التكاملات من الشكل :

$$I=\int R(x,\sqrt[2]{x},\sqrt[3]{x},\sqrt[4]{x})\,dx$$

حيث R دالة كسرية بالنسبة لـ x و $\sqrt[4]{x}$ و $\sqrt[3]{x}$ و $\sqrt[2]{x}$ حيث

$$m,n,r\in Z$$

نكامل هذه الدالة بتغيير المتحول حيث نفرض $x=t^{p}$ حيث p هو المضاعف المشترك لـ m,r,n

مثال :

$$I=\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt[2]{x}}\,dx$$

الحل :

$n=3$, $m=4$, $r=2$

p هو المضاعف المشترك الأصغر لـ m,n,r

لنفرض $x=t^{12}$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}}=((t^{12})^{\frac{2}{3}}=t^{\frac{2}{3}\times 12}=t^{8}$$
$$\sqrt[4]{x}=x^{\frac{1}{4}}=(t^{12})^{\frac{1}{4}}=t^{12\times\frac{1}{4}}=t^{3}$$
$$\sqrt[2]{x}=x^{\frac{1}{2}}=(t^{12})^{\frac{1}{2}}=t^{12\times\frac{1}{2}}=t^{6}$$

$$dx=12t^{11}dt$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{t^{12} + t^8 - t^3}{t^6} \, 12t^{11} \, dt$$

$$= \int (t^{12} + t^8 - t^3) \, 12t^5 \, dt$$

$$= 12 \int (t^{17} + t^{13} - t^8) \, dt$$

$x = t^{12} \Rightarrow t = x^{\frac{1}{12}}$

$$= 12 \left[\frac{t^{18}}{18} + \frac{t^{14}}{14} - \frac{t^9}{9} \right]$$

$$= 12 \left[\frac{1}{18} (x^{\frac{1}{12}})^{18} + \frac{1}{14} (x^{\frac{1}{12}})^{14} - \frac{1}{9} (x^{\frac{1}{12}})^9 + C \right]$$

$$= \frac{2}{3} x^{\frac{18}{12}} + \frac{12}{14} (x^{\frac{14}{12}} - \frac{12}{9} x^{\frac{9}{12}} + C$$

$$= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + \frac{6}{7} x^{\frac{7}{6}} - \frac{4}{3} x^{\frac{3}{4}} + C$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + \frac{6}{7} \sqrt[6]{x^7} - \frac{4}{3} \sqrt[4]{x^3} + C$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$J = \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$$

الحل:

$n = 2 \quad , \quad m = 3$

$P = 6 \Leftarrow m, n$ المضاعف المشترك لـ P

نفرض $x = t^6$

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} = (t^6)^{\frac{1}{2}} = t^3$$

$$\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} = (t^6)^{\frac{1}{3}} = t^2$$

$$dx = 6t^5\,dt$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{6t^5 \cdot dt}{t^3 \cdot t^2}$$

$$\Rightarrow I = \int \left[\text{باقي} + \text{تابع} \right] dt$$

المقسوم عليه

$$= \int \left(6t^2 - 6t + 6 + \frac{-6t^2}{t^3 + t^2}\right) dt$$

$$= \int \left(6t^2 - 6t + 6 - \frac{6t^2}{t^2(t+1)}\right) dt$$

$$= \int \left(6t^2 - 6t + 6 - \frac{6}{(t+1)}\right) dt$$

$6t^2 - 6t + 6$

$t^3 + t^2 \;\big|\; 6t^5$

$\mp 6t^5 \mp 6t^4$

$-6t^4$

$\pm 6t^4 \pm 6t^3$

$+6t^3$

$\mp 6t^3 \mp 6t^2$

$-6t^2$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$= 6\frac{t^3}{3} - 6\frac{t^2}{2} + 6t - 6\ln(t+1) + C$$

$$= 2(x^{\frac{1}{6}})^3 - 3(x^{\frac{1}{6}})^2 + 6(x^{\frac{1}{6}}) - 6\ln|x^{\frac{1}{6}}+1| + C$$

$$= 2x^{\frac{3}{6}} - 3x^{\frac{2}{6}} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln|\sqrt[6]{x}+1| + C$$

$x^{\frac{1}{2}}$ $x^{\frac{1}{3}}$

$$= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln|\sqrt[6]{x}+1| + C$$

2- حالة التكاملات:

$$I = \int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$$

حيث R دالة كسرية عادية، m عدد طبيعي، a، b، c، d أعداد حقيقية

- لإيجاد هذا التكامل نجري التغيير التالي:

$$t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$$

مثال:

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^3(x-2)}}$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^4 \frac{(x-2)}{(x-1)}}} = \int \frac{dx}{(x-1)^2\sqrt{\frac{(x-2)}{(x-1)}}}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نفرض أن: $t=\sqrt{\frac{(x-2)}{(x-1)}} \Rightarrow t^2=\frac{(x-2)}{(x-1)}$

$$(x-1)t^2=x-2$$
$$xt^2-t^2=x-2$$
$$xt^2-x=t^2-2$$
$$x(t^2-1)=t^2-2$$
$$x=\frac{t^2-2}{t^2-1}$$

$$\left(\frac{x-2}{x-1}\right)'=\frac{(1x-1)-(1x-2)}{(x-1)^2}=\frac{-1+2}{(x-1)^2}=\frac{1}{(x-1)^2}$$

$$dt=\frac{\left(\frac{x-2}{x-1}\right)'}{2\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}}=\frac{\frac{1}{(x-1)^2}}{2\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}}dx$$

$$\Rightarrow dt=\frac{\frac{1}{(x-1)^2}}{2t}dx$$

$$\Rightarrow dt=\frac{dx}{2t(x-1)^2} \Rightarrow dx=2t(x-1)^2\,dt$$

$$\Rightarrow I=\int\frac{2t(x-1)^2\,dt}{(x-1)^2t}$$

$$=\int 2\,dt \Rightarrow I=2t+c=\boxed{2\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}+c}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نجد dx بدلالة dt :

من : $x = \frac{t^2-2}{t^2-1}$

$$\Rightarrow dx = \frac{2t(t^2-1) - 2t(t^2-2)}{(t^2-1)^2}$$

$$dx = \frac{2t}{(t^2-1)^2}\,dt$$

نفرض أن I : $\int$ ... dx

$$\Rightarrow I = \int \frac{\frac{2t}{(t^3+1)^2}\,dt}{\left(\frac{t^2-2}{t^2-1}-1\right)^2 t}$$

ثم نكمل الحل .

مثال : $I = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt[3]{\frac{(x-1)}{(x+1)}(x+1)^3}} = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}\sqrt[3]{(x+1)^3}} \rightarrow (x+1)^{\frac{3}{3}}$$

$$= \frac{dx}{\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}(x+1)}$$

نفرض $t = \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}$ وظيفة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

3- حساب التكاملات المعطاة الآتية:

$$I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$$

الحل: نفرض:

$x=3\cos\theta$ أي $x=3\sin\theta$

$dx=3\cos\theta\,d\theta$

$x^2=9\sin^2\theta$

$$\Rightarrow I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{9\sin^2\theta\cdot 3\cos\theta\,d\theta}{\sqrt{9-9\sin^2\theta}}$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{9\sin^2\theta\cdot 3\cos\theta\,d\theta}{\sqrt{9(1-\sin^2\theta)}}$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{9\sin^2\theta\cdot 3\cos\theta\,d\theta}{3\sqrt{(1-\sin^2\theta)}}$$

فاتون

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{9\sin^2\theta\cdot 3\cos\theta\,d\theta}{3\sqrt{\cos^2\theta}}$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{9\sin^2\theta}{3|\cos\theta|}\cdot 3\cos\theta\,d\theta$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{9\sin^2\theta \cdot 3\cos\theta \, d\theta}{-3\cos\theta}$$

من $\frac{\pi}{2}$ إلى π تكون cos سالبة

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -9\sin^2\theta \, d\theta$$

$$= -9\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2\theta \, d\theta$$

قانون

$$= -9\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1-\cos 2\theta}{2} \, d\theta$$

$$= -9\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\theta\right] d\theta$$

$$= -9\left[\left(\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= -9\left[\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\pi\right) - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\sin\pi\right)\right]$$

$$= -9\left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right] = -9\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= -\frac{9\pi}{4}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مبرهنة تشيبيشف :

حساب التكاملات من الشكل :

$$I = \int x^m (a + b x^n)^p \, dx$$

حيث أن :

$a, b \in \mathbb{R} \quad m, n, p \in \mathbb{Q}$

نميز الحالات التالية :

(1) : $p \in \mathbb{Z}$ حيث p عدد صحيح نفرض

$$t = \sqrt[r]{x}$$

أو

$$x = t^r$$

حيث أن r هو المضاعف المشترك لمقامي

n, m

(2)

$$t = \sqrt[r]{a + b x^n} \quad \text{نفرض} \quad \frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$$

(3)

$$t = \sqrt[r]{\frac{a + b x^n}{x^n}} \quad \text{نفرض} \quad \frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

A to Z LIBRARY

FOR UNIVERSITY SERVIC

مثال $I = \int (\sqrt{x} + 4\sqrt[3]{x})^2 \, dx$

ط(1) تفك المطابقة : ــــــــ

ط(2) بمعنة تثبيت شيفت ــــــــ

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z