كلية العلوم

القسم : **الكيمياء**

السنة : **الاولى**

المادة : رياضيات عامة ٣

المحاضرة: السادسة /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

المحاضرة الخامسة

ج- توزيع بواسون : وهو من التوزيعات الاحتمالية المنفصلة .

يستخدم في نمذجة عدد الأحداث التي تحدث في فترة زمنية معينة أو في مساحة محددة بشرط أن تكون الأحداث مستقلة عن بعضها البعض وتحدث بمعدل ثابت

خصائص توزيع بواسون :

1) دالة الكتلة الاحتمالية : تعطى بالصيغة .

$$P(X=k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k}}{k!}$$

حيث k عدد الأحداث ، λ المعدل المتوسط لحدوث الأحداث

2) المتوسط (الحسابي / التوقع الرياضي) $E(X) = \lambda$

3) التباين : $Var(X) = \lambda$

الافتراضيات الأساسية :

1- الأحداث تحدث بشكل مستقل
2- معدل حدوث الأحداث ثابت خلال الزمن
3- لا يمكن أن يحدث أكثر من حدث واحد في لحظة زمنية معينة .

مثال : عدد المكالمات الهاتفية التي تصل إلى مركز الخدمة خلال ساعة معينة

- عدد السيارات التي تقف لتفتيش خلال فترة زمنية محددة .

مثال : إذا كان مركز الخدمة يتلقى 10 مكالمات بالساعة فكيف استخدام توزيع بواسون لتقدير احتمال تلقي أكثر أو أقل من هذا العدد خلال ساعة معينة

نريد حساب احتمال تلقي 15 مكالمة خلال ساعة معينة .

$$P(X=15) = \frac{e^{-10}\cdot 10^{15}}{15!} \approx 0,0347$$

مثال 2 : معدل مرور السيارات في الساعة هو كما يلي $\lambda = 5$.

عدد السيارات المطلوب حساب احتمالها $k=8$

$$P(X=k) = \frac{e^{-5}\,5^{k}}{k!} \Rightarrow P(X=8) = \frac{e^{-5}\cdot 5^{8}}{8!} \approx 0,065$$

6,5 % احتمال مرور 8 سيارات في ساعة معينة

4- التوزيع الهندسي :

يستخدم لنمذجة عدد المحاولات حتى أول نجاح في تجربة برنولي .
حيث تكون كل محاولة احتمال ثابت للنجاح.

- دالة الكتلة الاحتمالية.

$$P(X=k) = (1-p)^{k-1} \cdot p$$

حيث : k هو عدد المحاولات حتى أول نجاح .
p هو احتمال النجاح .

- المتوسط الحسابي (التوقع الرياضي) : $E(X) = \frac{1}{p}$

- التباين $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$

مثال : نفترض أن احتمال نجاح رمية كرة سلة 0,3 ونريد حساب احتمال أن تكون النجاح في المحاولة الرابعة .

$$P(X=4) = (1-0,3)^3 (0,3) = 0,103$$

إذاً احتمال أن تكون النجاح في المحاولة الرابعة 10,3 %.

أما التوقع الرياضي $E(X) = \frac{1}{0,3} = \frac{10}{3}$

$$= 3,33$$

$$Var(X) = \frac{1-0,3}{(0,3)^2} = \frac{0,7}{0,09} = \frac{70}{9} = 7,77$$

5- التوزيع فوق الهندسي .

- يستخدم عندما يتم السحب من مجموعة محددة دون إرجاع مثل اختيار بطاقات من مجموعة - أو اختيار عناصر من صندوق .
- يعتمد على حجم العينة وحجم المجتمع الكلي.

دالة الكتلة الاحتمالية :

$$P(X=k) = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

حيث N هو حجم المجتمع الكلي
(مثل عدد الكرات في الصندوق)
K عدد الكرات الناجحة (والتي تناسب العينة المطلوبة)
n عدد الكرات المسحوبة
k عدد الكرات المسحوبة من النوع المحدد

مثال : صندوق يحوي 20 كرة - منها 8 كرات حمراء ، 12 كرة زرقاء . ماذا سحبنا 5 كرات دون إرجاع ما احتمال أن تكون 3 منها حمراء

$$P(X=3) = \frac{\binom{8}{3}\binom{12}{2}}{\binom{20}{5}} \approx 0,32$$

التوقع الرياضي لقانون الهندسي :

$$E(X) = n\frac{K}{N}$$

ج بالعودة إلى السؤال : $E(X) = 5\frac{8}{20} = \frac{40}{20} = 2$

التباين :

$$V(X) = n\frac{K}{N}\left(\frac{N-K}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

$$Var(X) = 5\frac{8}{20}\left(\frac{20-8}{20}\right)\left(\frac{20-5}{20-1}\right)$$

$$= 2\left(\frac{12}{20}\right)\left(\frac{15}{19}\right) \approx 0,947$$

هناك العديد من التوزيعات الاحتمالية المتقطعة الأخرى - نكتفي بأخذ ثلاثة من المتغيرات المستمرة :

وهو متغير عشوائي يمكن أن يأخذ أي قيمة ضمن مجال معين من الأعداد الحقيقية، حيث تكون عدد القيم غير محدود ويتم تمثيله بدالة الكثافة الاحتمالية.

أنواع المتغيرات العشوائية المستمرة

① التوزيع الأسي : يستخدم لنمذجة الأزمنة بين الأحداث المتتالية في العمليات العشوائية مثل الوقت بين المكالمات الهاتفية :

دالة الكثافة : $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad ; x \geq 0$

توقعه الرياضي $E(X) = \frac{1}{\lambda}$

والتباين $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

مثال إذا كانت مدة الانتظار بين وصول اتصالين متتاليين لمركز الطوارئ تتبع توزيعاً أسياً بمعامل $\lambda = 0,5$

فإن : $E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,5} = 2$

$V(X) = \frac{1}{\lambda^2} = 4$

احسب احتمال أن تستغرق المكالمة أقل من دقيقة ؟

$$P(X < 1) = 1 - e^{-\frac{1}{2}} \approx 0,393$$

دالة التوزيع الاحتمالي التراكمي :

$$P(X \leq x) = F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda t}\,dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x = 1 - e^{-\lambda x} \quad ; x \geq 0$$

مثال بالسابق : احتمال أن تكون مدة المكالمة أقل من 3 دقائق.

$$P(X \leq 3) = F(3) = 1 - e^{-0,5(3)} \approx 0,776$$