كلية العلوم

القسم : **الكيمياء**

السنة : **الاولى**

المادة : رياضيات عامة٤

المحاضرة : **الخامسة/عملي/**

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ $\alpha \leq 1$ متباعدة

$\alpha > 1$ متقاربة

$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ و $e \simeq 2.7$

$n!! = n(n-2)(n-4)$

$n! = n(n-1)(n-2)$

1) ادرس تقارب كل من المتسلسلات الآتية:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1}\right)^n$$

بما أن لدينا $(\quad)^n$ نأخذ كوشي الجذري بالضرورة ولكن في هذه الحالة نأخذ كوشي

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n(3+\frac{1}{n})}\right)^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3+\frac{1}{n}} = \frac{1}{3}$$ و $\frac{1}{3} < 1$

المتسلسلة متقاربة

حسب اختبار كوشي (الجذر النوني)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)}$$

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

نقارنها بمتسلسلة أكبر منها لدى اختبار المقارنة

$n(2n+1) = 2n^2+n > n^2$ ⟹ $\frac{1}{n(2n+1)} < \frac{1}{n^2}$

$\frac{1}{2n^2+n} < \frac{1}{n^2}$ أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

متسلسلة رياضية فيها $\alpha = 2 > 1$

متقاربة

وحسب اختبار المقارنة ينتج أن

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)}$ متقاربة أيضاً

مثال:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n + 2n}$

لدينا $\frac{1}{5^n} = \left(\frac{1}{5}\right)^n$ وهي هندسية لذلك نقارنها بالمتسلسلة الهندسية

نلاحظ أن

$a_n = \frac{1}{5^n + 2n}$ وهي جميعاً حدود المتسلسلة ذات الحدود الموجبة

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n + 2n} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$

بما أن $\frac{1}{5^n}$ متسلسلة هندسية أساسها $r = \frac{1}{5} < 1$ وهي متقاربة

حسب اختبار المقارنة فإن المتسلسلة المفروضة متقاربة

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$

حسب كوشي

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n\left(2+\frac{1}{n}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} < 1$$

متقاربة حسب اختبار كوشي.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$$

لعينا $(n!)$ نستخدم دالمبير

$$a_n = \frac{2^n n!}{n^n} \quad , \quad a_{n+1} = \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{2^n n!} = \frac{2(n+1)\,n!\,n^n}{(n+1)(n+1)^n\,n!} = \frac{2n^n}{(n+1)^n}$$

$$= 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$= 2\frac{n^n}{(n+1)^n} = 2\frac{n^n}{(n(1+\frac{1}{n}))^n}$$

$$= \frac{2n^n}{n^n(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{2}{(1+\frac{1}{n})^n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{2}{e} < 1$$

السلسلة متقاربة حسب اختبار دالمبير

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n-1)!}$$

$$a_n = \frac{n^2}{(n-1)!} \qquad a_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{(n+1-1)!} = \frac{(n+1)^2}{n!}$$

$$\lim_{n\to\infty} = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n!} \times \frac{(n-1)!}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 (n-1)\, n!}{n!\; n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+2+n+1)(n-1)}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3} = 0$$

$0 < 1$

المتسلسلة متقاربة حسب اختبار رابي

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{nn}} - 1\right)$$

متقاربة $\Leftarrow$ متباعدة $\Leftarrow 1$

يمكن حلها بطريقتين b_1 حسب رابي b_2 حسب لوغاريتم

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

حسب رابي

$$a_n = \frac{1}{n^2} \qquad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{(n+1)^2}{n^2} - 1\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n} - n = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 - n^2}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1-n^2}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(2+\frac{1}{n}\right)}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2 + \frac{1}{n} = 2 > 1$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مسب رابب حالت المتسلسلة متقاربة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{2n!!} \right]$$

$$a_n = \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \qquad a_{n+1} = \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}$$

$$a_{n+1} = \frac{(2n+1)(2n-1)!!}{(2n+2)(2n)!!}$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \times \frac{(2n+2)(2n!!)}{(2n+1)(2n-1)!!} = \frac{2n+2}{2n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2n+2}{2n+1} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+2n}{2n+1} - n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n^2+2n}{2n+1} - \frac{n(2n+1)}{2n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n^2+2n-2n^2-n}{2n+1}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n(2+\frac{1}{n})} = \frac{1}{2} < 1$$

متباعدة اصبح اختبار رابب

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة