كلية العلوم

القسم : **الكيمياء**

السنة : **الاولى**

المادة : رياضيات عامة٤

المحاضرة : السادسة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

اختبار كوشي ((الجذر النوني))

$\sum a_n$ سلسلة عددية ونفرض $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = c$

عين حالات:

1. $c < 1$ ⇐ سلسلة متقاربة
2. $c > 1$ ⇐ سلسلة متباعدة
3. $c = 1$ ⇐ حالة شك

اختبار دالمبير:

من أجل سلسلة $\sum a_n$ حيث $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = c$

عين حالات:

1. $c < 1$ ⇐ سلسلة متقاربة
2. $c > 1$ ⇐ سلسلة متباعدة
3. $c = 1$ ⇐ حالة شك

اختبار رابب:

من أجل سلسلة $\sum a_n$ حيث $\lim_{n \to +\infty} \left[\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right] = c$

عنر حالات:

1. $|r|<1$ ⟸ سلسلة متباعدة
2. $|r|>1$ ⟸ سلسلة متقاربة
3. $|r|=1$ ⟸ حالة شك

أمثلة: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

1- ادرس تقارب بثلاث طرق

2- استنتج المجموع

الحل:

1- طريقة الأولى: السلسلة هندسية أساسها $|r|<1$ $q=\frac{1}{3}$ متقاربة

الطريقة الثانية: نظرية اختبار الجذر النوني

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{3}\right)^n}=\frac{1}{3}<1 \Rightarrow \text{متقاربة}$$

الطريقة الثالثة: نظرية اختبار دالمبير

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{3}\right)^n}=\frac{1}{3}<1 \quad \text{متقاربة}$$

2- استنتاج المجموع:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}$$

مثال هام جداً

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$$

حسب اختبار الجذر النوني

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2\cdot\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} = \lim_{n\to+\infty} \left[\left(1+\frac{-1}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{-1}}\right]^{-\frac{1}{n+1}\cdot n} = e^{-1} = \frac{1}{e} < 1$$

$e \simeq 2.7$

⇐ متسلسلة متقاربة

مثال: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$

ط: حسب الجذر النوتي

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 < 1$ متقاربة

ط2: لدينا $n^n \geq n^2 \Leftarrow \frac{1}{n^n} \leq \frac{1}{n^2}$

ولكن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ رياضية متقاربة

⇐ حسب المقارنة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ متقاربة

مثال: درسنا في مثال سابق $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

الآن بطريقة أخرى: لندرس السلسلة حسب الجذر

حالة 1

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)\cdot(n+1)}}{\frac{1}{n(n+1)}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+2} = 1$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\lim_{n\to+\infty} n\left[\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right] = \lim_{n\to+\infty} n\left[\frac{n+2}{n}-1\right]$$ نستنتج:

$= \lim_{n\to+\infty} n+2-n = 2 > 1 \Rightarrow$ متقاربة

مثال: ادرس تقارب عائلي (دالمبير)

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^{(n)}}$ ← (أسي) هذريوني

الحل: نبدأ حسب دالمبير (هي الأسهل)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{2^{n+1}}}{\frac{n!}{2^n}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{2} = +\infty > 1$$ متباعدة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z