كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الرابعة**

المادة : انصاف نواقل

المحاضرة : السادسة/نظري/

استنتاج علاقة معامل T-emf استناداً إلى معادلة بولتزمان الحركيّة:

Obtaining T-emf Coefficient by Kinetic Boltzmann Equation

تطرقنا في الفقرة السابقة (18) إلى أحد أشكال معادلة بولتزمان (المعادلة (18-12))، $f = f_0 + \frac{e\mathrm{E}\tau}{m_n}\frac{\partial f_0}{\partial \upsilon_x}$. وهناك خيار آخر لكتابة معادلة بولتزمان من أجل الحالة المستقرة يمكن التعبير عنها بالشكل الآتي:

$$\left(\vec{\upsilon}_n \cdot \vec{\nabla}_r f\right) + \frac{1}{\hbar}\left(\vec{F} \cdot \vec{\nabla}_k f\right) = -\frac{f_1}{\tau}, \qquad (20\text{-}19)$$

حيث $\vec{\upsilon}_n$ سرعة الإلكترون،

و $\vec{F}$ القوة المؤثرة فيه،

و $\vec{\nabla}_r$ مؤثر التدرج في فضاء الإحداثيات،

و $\vec{\nabla}_k$ مؤثر التدرج في الفضاء – $\vec{k}$.

يجدر بالذكر أيضاً أن:

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}_r = \vec{\nabla}_r = \frac{\partial}{\partial x}\hat{\mathrm{i}} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\mathrm{j}} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathrm{k}};$$

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}_k = \vec{\nabla}_k = \frac{\partial}{\partial k_x}\hat{\mathrm{i}} + \frac{\partial}{\partial k_y}\hat{\mathrm{j}} + \frac{\partial}{\partial k_z}\hat{\mathrm{k}},$$

حيث $\hat{\mathrm{i}}$ و $\hat{\mathrm{j}}$ و $\hat{\mathrm{k}}$ متجهات الواحدة الموجَّهة وفق المحاور الإحداثية.

إن الضرب السُلمي الوارد في المعادلة يمكن دراسته وفق الآتي:

$$\left(\vec{\upsilon}_n \cdot \vec{\nabla}_r f\right) = \upsilon_{nx}\frac{\partial f}{\partial x} + \upsilon_{ny}\frac{\partial f}{\partial y} + \upsilon_{nz}\frac{\partial f}{\partial z};$$

$$\frac{1}{\hbar}\left(\vec{F} \cdot \vec{\nabla}_k f\right) = \left(\frac{d\vec{k}}{dt} \cdot \vec{\nabla}_k f\right) = \frac{\partial k_x}{\partial t} \cdot \frac{\partial f}{\partial k_x} + \frac{\partial k_y}{\partial t} \cdot \frac{\partial f}{\partial k_y} + \frac{\partial k_z}{\partial t} \cdot \frac{\partial f}{\partial k_z}.$$

ومن أجل قيمة صغيرة للانحراف، $f_1 = f - f_0$، يمكن استبدال تابع التوزّع f في الطرف الأيسر من المعادلة (20-19) بتابع التوزّع f_0، وعندها يكون لدينا المساواة:

$$\left(\vec{\upsilon}_n \cdot \vec{\nabla}_r f_0\right) + \frac{1}{\hbar}\left(\vec{F} \cdot \vec{\nabla}_k f_0\right) = -\frac{f_1}{\tau}, \qquad (21\text{-}19)$$

والقوة $\vec{F}$ في الحالة الراهنة تساوي:

$$\vec{F} = -e\vec{\mathrm{E}} = e\vec{\nabla}_r \varphi, \qquad (22\text{-}19)$$

حيث $\vec{\mathrm{E}}$ شدة الحقل الكهربائي للشحنات الحجمية و φ الكمون الكهراكدي الموافق له.

ثمّ إن تابع التوزّع f_0 من أجل غاز إلكتروني غير متحلل يساوي:

$$f_0 = \mathrm{e}^{-\frac{E - E_F}{k_B T}} \equiv f_0\left(E, E_F, T\right). \qquad (23\text{-}19)$$

والطاقة الكليّة للإلكترون تساوي:

$$\boxed{E=\frac{\hbar^2k^2}{2m^*},} \tag{24-19}$$

حيث افترضنا أن الكتلة الفعَّالة، m^*، **سُلميَّة** بغرض تبسيط الدراسة، أي أننا نتعامل مع سطح تساوي طاقة كروي الشكل.

يمكن التعبير عن سرعة الإلكترون بالعلاقة الآتية:

$$\vec{\upsilon}_n=\frac{1}{\hbar}\vec{\nabla}_k E(\vec{k})=\frac{1}{\hbar}\vec{\nabla}_k\left(\frac{\hbar^2k^2}{2m^*}\right)=\frac{\hbar}{m^*}\vec{k}\,. \tag{25-19}$$

وعند تفاضل f_0 في فضاء الإحداثيات يجب أن نأخذ بالحسبان أنه في الحالة الراهنة:

$$T=T(x,y,z);\quad E_F=E_F(x,y,z).$$

وعندها، نحصل على المساواة الآتية مع الأخذ بالحسبان أن $\frac{\partial f_0}{\partial E}=-\frac{\partial f_0}{\partial E_F}$ (المعادلة (19-23)):

$$\vec{\nabla}_r f_0=\frac{\partial f_0}{\partial T}\vec{\nabla}_r T+\frac{\partial f_0}{\partial E_F}\vec{\nabla}_r E_F=\frac{\partial f_0}{\partial E}\left(\frac{E_F-E}{T}\vec{\nabla}_r T-\vec{\nabla}_r E_F\right); \tag{26-19}$$

$$\vec{\nabla}_k f_0=\frac{\partial f_0}{\partial E}\vec{\nabla}_k E=\hbar\frac{\partial f_0}{\partial E}\vec{\upsilon}_n\,. \tag{27-19}$$

(راجع المعادلة (19-25)).

وبالتعويض عن العلاقتين (19-26) و (19-27) في المعادلة (19-21) نستطيع تعيين f_1 بالمعادلة:

$$f_1=-\tau(\vec{k})\frac{\partial f_0}{\partial E}\left[\frac{E_F-E}{T}\vec{\nabla}_r T-\vec{\nabla}_r(E_F-e\varphi)\right]\vec{\upsilon}_n\,. \tag{28-19}$$

يوجد في عنصر الحجم (في الفضاء – $\vec{k}$) وواحدة حجم البلّورة المدروسة $2\frac{dV_{\vec{k}}}{8\pi^3}$ حالة كمومية يتوفّر فيها

$$dn=\frac{dV_{\vec{k}}}{4\pi^3}f(\vec{r},\vec{k})$$

حاملاً للشحنة الكهربائية (في الحالة الراهنة dn إلكتروناً) سرعة كل منها

$$\vec{\upsilon}_n=\frac{1}{\hbar}\frac{dE}{d\vec{k}}\equiv\frac{1}{\hbar}\vec{\nabla}_k E=\frac{\hbar\vec{k}}{m^*}\,.$$

وتكوِّن هذه الإلكترونات عنصر كثافة التيار الإلكتروني $d\vec{j}_n$:

$$d\vec{j}_n=-e\vec{\upsilon}_n dn=-e\vec{\upsilon}_n\frac{dV_{\vec{k}}}{4\pi^3}f(\vec{r},\vec{k})$$

حيث $e>0$.

ومن ثمَّ:

$$\vec{j}_n = -\frac{e}{4\pi^3}\int_{V_{\vec{k}}} \vec{\upsilon}_n\, f\left(\vec{r},\vec{k}\right) dV_{\vec{k}}$$
$$= -\frac{e}{4\pi^3}\int_{V_{\vec{k}}} \vec{\upsilon}_n \left[f_0\left(\vec{r},\vec{k}\right) + f_1\left(\vec{r},\vec{k}\right)\right] dV_{\vec{k}}$$
$$= -\frac{e}{4\pi^3}\int_{V_{\vec{k}}} \vec{\upsilon}_n\, f_0\left(\vec{r},\vec{k}\right) dV_{\vec{k}} - \frac{e}{4\pi^3}\int_{V_{\vec{k}}} \vec{\upsilon}_n\, f_1\left(\vec{r},\vec{k}\right) dV_{\vec{k}}\,.$$

- إن التابع $f_0\left(\vec{r},\vec{k}\right)$ زوجي والتابع $\vec{\upsilon}_n\, f_1\left(\vec{r},\vec{k}\right)$ فردي،
- ومن ثمَّ تكامل حاصل الضرب الأخير في حدود التناظر يساوي الصفر.
- وفيزيائياً، هذا يعني عدم وجود تيار في المادة الواقعة في حالة التوازن الترموديناميكي.
- بهذا الشكل، يمكن التعبير عن كثافة تيار الإلكترونات بالشكل الآتي:

$$\vec{j}_n = -\frac{e}{4\pi^3}\int_0^{\infty} \frac{\hbar\vec{k}}{m^*}\left\{-\frac{m^* l}{\hbar\vec{k}}\frac{\partial f_0}{\partial E}\left[\frac{E_F}{T}\vec{\nabla}_r T - \frac{E}{T}\vec{\nabla}_r T - \vec{\nabla}_r\left(E_F - e\varphi\right)\right]\right\}\frac{\hbar\vec{k}}{m^*}\, d\left(\frac{4}{3}\pi\,\vec{k}^3\right),$$

حيث

$$\tau\left(\vec{k}\right) = \frac{l}{\vec{\upsilon}_n} = \frac{m^* l}{\hbar\vec{k}}\,. \qquad (29\text{-}19)$$

(طول المسار الحر الوسطي للإلكترون).

على اعتبار أن الحاملات تتبعثر على الاهتزازات الصوتية للشبكة البلّورية وطول المسار الحر الوسطي للإلكترون مستقل عن الطاقة $(r = 0)$.

إذن، **المركّبة الإلكترونية** لكثافة التيار تساوي:

$$\vec{j}_n = \frac{e\hbar l}{3\pi^2 m^*}\left[\frac{E_F}{T}\vec{\nabla}T - \vec{\nabla}\left(E_F - e\varphi\right)\right]\int_0^{\infty}\frac{\partial f_0}{\partial E}\,k^3 dk - \frac{e\hbar l}{3\pi^2 m^*}\frac{\vec{\nabla}T}{T}\int_0^{\infty}\frac{\partial f_0}{\partial E}\,E\,k^3 dk\,; \qquad (30\text{-}19)$$

حيث $\vec{\nabla} \equiv \vec{\nabla}_r$.

نوجد بعد ذلك **المركّبة الثقبية** لكثافة التيار **ثمّ نجعل التيار الكليّ مساوياً الصفر**، لأن إيجاد T-emf يُعيَّن؛ كفرق كمون من أجل دارة مفتوحة.

القوة المحركة الكهراحرارية T-emf التفاضلية تساوي:

$$\alpha = \frac{\left|\vec{\nabla}\left(\varphi - E_F/e\right)\right|}{\left|\vec{\nabla}T\right|}\,. \qquad (31\text{-}19)$$

وعند تبعثر الإلكترونات على الاهتزازات الصوتية الطولانية للشبكة البلّورية يمكن التعبير عن حركيّتها (التي نحصل عليها من المعادلة (18-66) حيث τ_0 ثابت من أجل البلّورة المدروسة هنا) بالشكل الآتي:

$$\mu_{TV} = \frac{4e\tau_0}{3\sqrt{\pi k_B}\left(m^*\right)^{5/2}T^{3/2}} = bT^{-3/2}\,. \qquad (66\text{-}18)$$

وبدلالة طول المسار الحر الوسطي بالعلاقة الآتية:

$$\mu_{TV}=\frac{4el}{3\sqrt{2\pi m^* k_B T}}. \tag{32-18}$$

وباستخدام علاقات الكميّات N_c، و N_υ، و n_0، p_0 ومقادير أخرى نحصل في نهاية المطاف على العلاقة الآتية (راجع العلاقتين (19-17) و (19-18)):

$$\boxed{\alpha=\frac{k_B}{e}\frac{\mu_p p_0\left[2+\ln\left(N_c/n_0\right)\right]-\mu_n n_0\left[2+\ln\left(N_\upsilon/p_0\right)\right]}{\mu_p p_0+\mu_n n_0},} \tag{33-18}$$

أي نحصل على العلاقة (19a-19) عند وضع المساواة $r=0$ فيها.

ومن أجل نصف ناقل ذاتي، آخذين بالحسبان $N_c=N_\upsilon$، نجد

$$\alpha_i=-\frac{k_B}{e}\frac{\left(\mu_n/\mu_p\right)-1}{\left(\mu_n/\mu_p\right)+1}\left(2+\frac{\Delta E_0}{k_B T}\right). \tag{34-19}$$

وبهذا الشكل، نجد أن α_i تُحدَّدُ في نصف ناقل ذاتي بنسبة حركيّة الإلكترونات إلى حركيّة الثقوب، وبعرض المنطقة المحظورة، ΔE_0، ودرجة الحرارة T.

يُلاحظ لدى استنتاج العلاقتين (19-33) و (19-34) أنَّه لم يؤخذ بالحسبان "التهاء" حاملات الشحنة بالفونونات:

- فعند توفّر تدرج حراري في نصف ناقل تُلاحظ حركة موجَّهة للفونونات، تبدأ من المجالات الحارة نحو المجالات الباردة في نصف الناقل.
- وعند كل تصادم إلكترونٍ مع فونونٍ مترافقٍ بفناء الفونون ينتقل اندفاعه إلى الإلكترون.
- وطالما تعداد الفونونات ذات الاندفاع الموجّه من المجالات الحارة نحو المجالات الباردة **أكثر** من تعداد الفونونات ذات الاندفاع الموجّه في الاتجاه المعاكس، **فإن جزءاً من الاندفاع ينتقل إلى الإلكترونات.**
- وبنتيجة التصادمات المُشار إليها يُرصد انسياق إضافي يكوّن قوة محرِّكة كهراحرارية إضافية، ولكن مفعول الازدياد يُلاحظ في درجات الحرارة **المنخفضة فقط،** لأنه عند رفع درجة الحرارة يستعيد تبعثر الفونونات على الفونونات التوزّع المتوازن لها بسرعةٍ، فيتلاشى بذلك مفعول الزيادة المذكور أعلاه.

20- مفعول هول Hall Effect

لقد تمت في الفقرات السابقة دراسة الناقلية الكهربائية تحت تأثير حقل كهربائي وعند توفّر تدرجٍ لتركيز حاملات الشحنة أيضاً. ننتقل الآن إلى دراسة إحدى **الظواهر الغلفانية المغنطيسية**[1] *Galvanomagnetic Phenomena* – مفعول هول الذي يُرصد في الفلزات وأنصاف النواقل ويُستخدم في التطبيقات العملية على نطاق واسع؛ وعلى وجه الخصوص، لقد انتشرت كثيراً مِحسّات هول نصف الناقلة Semiconductor Hall Sensors التي تُستعمل في قياس شدة الحقل المغنطيسي (التحريضية).

تسمى الظواهر الحركية التي تنشأ لدى تطبيق حقل كهربائي وآخر مغنطيسي بآن معاً **بالظواهر الغلفانية المغنطيسية**. ويكمن مفعول هول، على وجه الخصوص، في **نشوء قوة محرِّكة كهربائية** في اتجاه **عمودي** على اتجاه حركة التيار الكهربائية عند وضع العينة المدروسة في حقلٍ مغنطيسيٍ عرضانيٍ.

النظرية الأولية لمفعول هول من أجل حاملات شحنة من نوع واحد:

لندرس عيّنة نصف ناقلة لها شكل متوازي مستطيلات، كما يوضح الشكل (1a-20): لنفرض أن تياراً كهربائياً يجري في العيّنة نصف الناقلة من جهة اليسار نحو اليمين. فإذا تشكّل التيار بالثقوب، فإن سرعة انسياقها $\vec{\upsilon}_d$ تأخذ اتجاهاً موافقاً لاتجاه التيار $\vec{I}$، كما في الشكل (1b-20)؛ أمّا إذا تشكّل التيار بالإلكترونات فتتجه السرعة $\vec{\upsilon}_d$ في الاتجاه المعاكس لاتجاه $\vec{I}$، كما في الشكل (1c-20).

لنضع نصف الناقل في حقل مغنطيسي خارجي، $\vec{B}$، بحيث تتجه التحريضية في اتجاه عمودي على اتجاه التيار (نحو القارئ). في هذه الحالة تساوي قوة لورانتس:

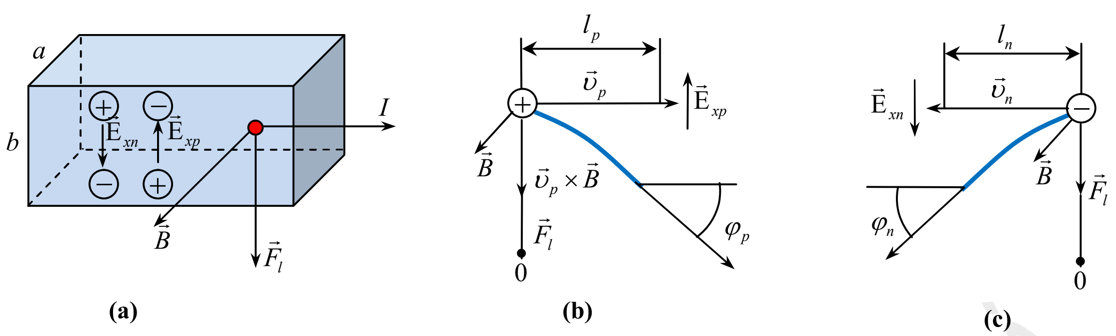
$$\vec{F}_l = e\,\vec{\upsilon}_d \times \vec{B}\,. \tag{2-20}$$

- فمن أجل الثقوب سيتجه الضرب المتجه $\left(\vec{\upsilon}_d \times \vec{B}\right)$ وقوة لورانتس، $\vec{F}_l$، في هذه الحالة، **نحو الأسفل**؛
- ومن أجل الإلكترونات يتجه **الضرب المتجه** $\left(\vec{\upsilon}_d \times \vec{B}\right)$ **نحو الأعلى** وقوة لورانتس $\vec{F}_l$ **نحو الأسفل** $.(e<0)$

ومن ثمَّ، ستنحرف الإلكترونات والثقوب تحت تأثير الحقل المغنطيسي نحو الوجه السفلي لمتوازي المستطيلات، وعندها سيفتقر الوجه العلوي للثقوب في الحالة الأولى، وللإلكترونات في الحالة الثانية.

- وبهذا الشكل، سينشحن الوجه السفلي لنصف الناقل من النوع-p إيجابياً والعلوي سلبياً، فينشأ حقل هول، بحيث يكون متجهاً من الأسفل نحو الأعلى.
- أمّا في نصف الناقل من النوع-n، فينشحن الوجه السفلي (عندما يكون التيار بنفس الاتجاه السابق) سلبياً والوجه العلوي إيجابياً، فينشأ حقل هول متجهاً من الأعلى نحو الأسفل.

[1] ظاهرة كهربائية تحدث عندما يوضع ناقل أو نصف ناقل يجري فيه تيار في حقلٍ مغناطيسي.

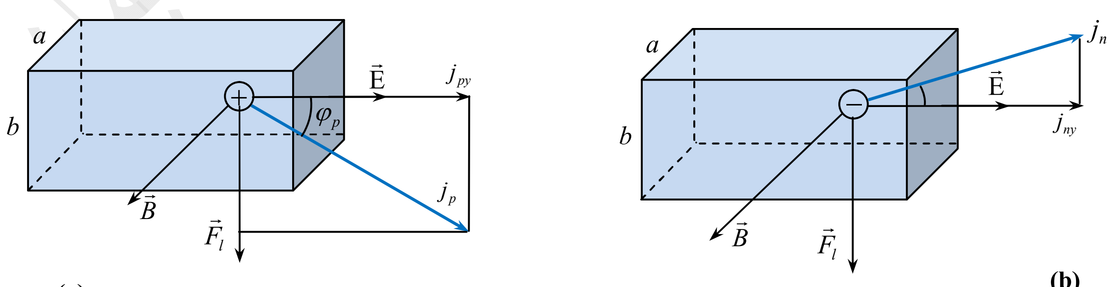


الشكل (1-20): انحراف الإلكترونات والثقوب المتحركة في حقل مغنطيسي في العيّنة (a)؛

الشكلان (b) و (c) يوضحان هذا الانحراف خارج العيّنة.

يوضح الشكل (1-20) وضعي ثقبٍ وإلكترونٍ انحرفا تحت تأثير حقل مغنطيسي عند انتقالهما الانسياقي على امتداد طول المسار الحر الوسطي l_n و l_p، حيث يُفترض عدم وجود حقل هول بعد.

- تسمى الزاويتان φ_n و φ_p زاويتي هولٍ.
- عند تمثيل متجهتي كثافتي تيار الثقوب وتيار الإلكترونات، $\vec{j}_n$ و $\vec{j}_p$، نجد عند الأخذ بالحسبان اتجاه دوران كل منهما، φ_n و φ_p، أن كثافتي التيارين، $\vec{j}_n$ و $\vec{j}_p$، تدوران باتجاهين متعاكسين، كما يوضح الشكلان (2a-20) و (2b-20). ويُفترض هنا، إمَّا عدم وجود تأثير حقل هول بعدْ، وإمَّا وجود عيّنة نصف ناقلة غير محدودة في الاتجاه b (كأن نصمم العيّنة الأخيرة على هيئة قرصٍ).
  - وفي الشروط العادية، ومن أجل نصف ناقل محدود، **تتراكم الشحنات المنحرفة** تحت تأثير الحقل المغنطيسي على الوجهين المتقابلين لهذه العيّنة المحدودة ويستمر هذا التراكم طالما حقل هول قيد التشكُّل **لم يُعدِّل** قوة لورانتس بعدْ ويحدث التوازن بينهما.
  - وبعد بلوغ **التوازن الديناميكي** هذا، يمكن أن نعتبر أن كثافة التيار $\vec{j}_n$ أو $\vec{j}_p$ عند وجود **نوع واحد** من حاملات الشحنة لا تنحرف بالحقل المغنطيسي.



الشكل (2-20): تغير تيار الثقوب (a) والإلكترونات (b) في الحقل المغنطيسي؛

j_{py} و j_{ny} مسقطا كثافة التيار على اتجاه الحقل الكهربائي الخارجي.

- ومن ثمَّ عند التواجد المديد لنصف الناقل الذي يمر فيه التيار في حقل مغنطيسي عرضاني يترسَّخ **فرق كمون عرضاني** معيّن يسمَّى **القوة المحرِّكة الكهربائية لهول** *Hall Electromotive Force* **(كمون هول الكهربائي)** عند وضع عيّنة نصف ناقلة في دارة مغلقة.

وتُعدُّ شدة الحقل الكليّة، $\vec{\mathrm{E}}_t$، مجموعاً متجهاً مساوياً $\vec{\mathrm{E}}+\vec{\mathrm{E}}_x$ وتصنع مع الحقل $\vec{\mathrm{E}}$ **زاوية هول**، φ، كما يوضح الشكل (20-3).

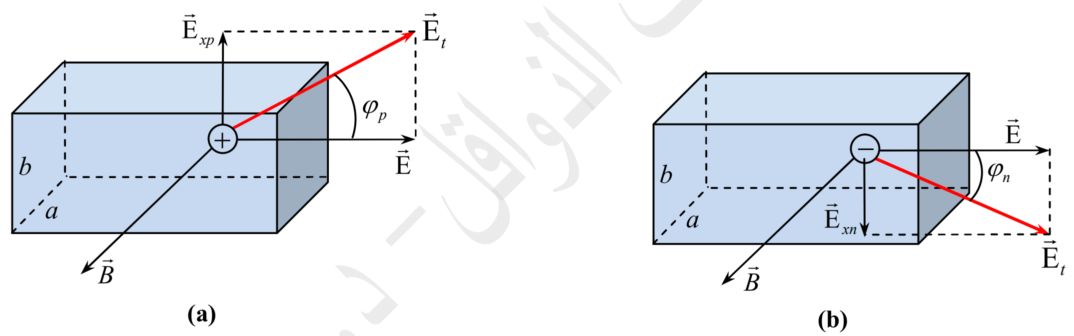
وهكذا نجد أنه في حالة وجود نوع واحد من حاملات الشحنة، فإن **الشرط** الذي يُحدِّد حقل هول يكمن في مساواة **القيم المطلقة** لقوة لورانتس وقوة حقل هول المتشكلة:

$$F_l = e\,\mathrm{E}_x \qquad (2\text{-}20)$$

أو

$$e\,\upsilon_d\,B = e\,\mathrm{E}_x \qquad (3\text{-}20)$$

ولكن هذا الشرط يكون محققاً فقط من أجل قيمة ما لسرعة الانسياق υ_d، وهذا يعني أنه إذا امتلك الطرف الأيمن



الشكل (20-3): زاوية هول في نصف الناقل الثقبي (a) ونصف الناقل الإلكتروني (b).

للمساواة (20-3) قيمة محدودة، فإن طرفها الأيسر يمتلك أيضاً **قيمة واحدة للسرعة**. وهذه الحالة غاية في الأهمية، لارتباط ظواهر غلفانية مغنطيسية أخرى بها. يُقصد بالسرعة υ_d، في العلاقة (20-3)، **السرعة الوسطية لانسياق حاملات الشحنة**، لأن معظم هذه الحاملات ينتقل بسرعٍ قريبةٍ من السرعة الوسطية.

بضرب طرفي العلاقة (20-3) بتركيز الإلكترونات، n، نحصل على المساواة الآتية من أجل نصف ناقل من النوع-n:

$$ne\,\overline{\upsilon}_d\,B = e\,\mathrm{E}_x n \qquad (4\text{-}20)$$

ولكن، طالما أن $\overline{\upsilon}_d$ تُمثِّل سرعة الانسياق الوسطية للإلكترونات، فإن حاصل الضرب $ne\,\overline{\upsilon}_d$، وتبعاً لقانون أوم، يساوي كثافة التيار j_n :

$$ne\,\overline{\upsilon}_d = \frac{I_n}{ab} = j_n\,, \qquad (5\text{-}20)$$

حيث a و b بُعدان خطِّيان للعينة المدروسة في الشكل (20-1). $e\upsilon_d B = e\mathrm{E}_x$

وبهذا الشكل نحصل من المعادلتين (20-3) و (20-5) على المساواة الآتية:

$$\mathrm{E}_{nx} = \overline{\upsilon}_d B = \frac{1}{en}\frac{I_n}{ab}B = \frac{1}{en}j_n B\,, \tag{6-20}$$

والمقدار $\mathrm{E}_{nx}b$ ليس سوى فرق الكمون العرضاني الذي يُرمز له بالرمز V_{nx} ويسمى **بكمون هول الكهربائي**:

$$V_{nx} = \frac{1}{en}\frac{I_n B}{a} = \frac{1}{en}j_n B\,b\,. \tag{7-20}$$

وإذا أخذنا بالحسبان توزّع حاملات الشحنة على السُّرع في أنصاف النواقل اللامتحللة، نحصل بدلاً من المساواة (20-7) على العلاقة:

$$\boxed{V_{nx} = \frac{A}{en}\frac{I_n B}{a} = \frac{A}{en}j_n B\,b\,,} \tag{8-20}$$

حيث A مقدار، يسمى **عامل هول** *Hall Factor*، فضلاً عن أن قيمته تساوي **عند تبعثر** الإلكترونات على الاهتزازات الصوتية للشبكة البلّورية **(الفونونات الصوتية)** $A = \frac{3\pi}{8} = 1.18$ **من أجل شبكات الـ Si، و Ge، و InAs**، وغيرها في درجات الحرارة المرتفعة نسبياً، بما فيها درجة حرارة الغرفة.

وعند **تبعثر الإلكترونات على أيونات الذرة الشائبة**، يساوي عامل هول، A: $A = \frac{315\pi}{512} = 1.93$

وإذا أخذنا بالحسبان أن شحنة الإلكترونات سالبة، فيمكننا إعادة كتابة العلاقة (20-8) بالشكل الآتي:

$$\boxed{V_{nx} = -\frac{A}{en}\frac{I_n B}{a} = R_{xn}\frac{I_n B}{a}\,,} \tag{9-20}$$

حيث $e > 0$ و R_{xn} **معامل هول** *Hall Coefficient*:

$$\boxed{R_{xn} = -\frac{A}{en}.} \tag{10-20}$$

ومن أجل نصف ناقل من النوع-p يتم الحصول على جميع العلاقات الموافقة بإتباع الطريقة المذكورة أعلاه من أجل الثقوب، بما فيها علاقة R_{xp}:

$$\boxed{R_{xp} = \frac{A}{ep}.} \tag{11-20}$$

حيث p تركيز الثقوب.

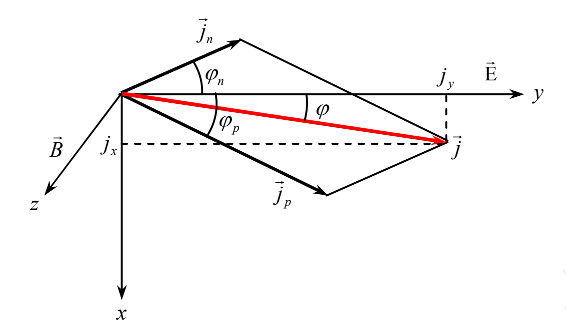
استنتاج معامل هول من أجل نصف ناقل ناقليته الكهربائية مختلطة:

Obtaining Hall Coefficient for a Semiconductor with Mixed Conductivity

- لندرس نصف ناقل ناقليته مختلطة حيث لا يمكن أن نُهمل فيه لا الإلكترونات ولا الثقوب.
- أضف إلى ذلك، تنحرف فيه كثافتا تيار الثقوب $\vec{j}_p$ وتيار الإلكترونات $\vec{j}_n$، كما ذكرنا سابقاً، في اتجاهين متعاكسين. ولذلك، لا بد من تمثيل المخطط الشعاعي (مخطط المتجهات) للتيارات من أجل نصف الناقل ذي الناقلية الكهربائية المختلطة.

✓ يوضح الشكل (20-4) هذا المخطط على فرض أن حقل هول الكهربائي لم يبدأ بالتأثير بعدُ.

✓ إن الكثافة الكليّة للتيار $\vec{j}$ هي **مجموعٌ متجهٌ** لكثافتي التيار الثقبي $\vec{j}_p$ والتيار الإلكتروني $\vec{j}_n$ **ويُشكِّل** زاوية دوران φ مع اتجاه الحقل الكهربائي الخارجي المطبق، $\vec{\mathrm{E}}$، والمسؤول عن انسياق حاملات الشحنة،



الشكل (20-4): انحراف التيارات عند وجود ناقلية كهربائية مختلطة

✓ فضلاً عن أن زاوية الدوران تكون صغيرة لضعف قيمة الحقل المطبق، مما يسمح لنا بكتابة العلاقة الآتية:

$$\boxed{\vec{j} = \vec{j}_n + \vec{j}_p} \qquad (10\text{-}20)$$

نختار المحاور الإحداثية بحيث يتجه المحور x باتجاه حقل هول الكهربائي أو باتجاه معاكس له، والمحور y في اتجاه الحقل الخارجي $\vec{\mathrm{E}}$، والمحور z في اتجاه الحقل المغنطيسي $\vec{B}$.

وعندها يكون لدينا علاقة ظل زاوية (صغيرة) φ من الشكل الآتي:

$$\tan\varphi = \frac{j_x}{j_y} \cong \varphi \,, \qquad (13\text{-}20)$$

حيث j_x و j_y مسقطا متجه التيار الكلي على المحورين x و y على الترتيب (أي نتعامل مع القيم المطلقة لجميع الكميّات).

وتبعاً للشكل (20-4) يمكننا كتابة علاقة مركبة كثافة التيار j_y الآتية:

$$j_y = j_p \cos\varphi_p + j_n \cos\varphi_n = e\left(p\mu_p + n\mu_n\right)\mathrm{E} \equiv \sigma\,\mathrm{E}\,, \qquad (14\text{-}20)$$

حيث أن $\cos\varphi_p = \cos\varphi_n = 1$ على اعتبار أن الزاويتين φ_p و φ_n صغيرتان، لكونهما تُدرسان في حالة الحقول المغنطيسية الضعيفة $\vec{B}$.

ومركبة كثافة التيار j_x تُكتب تبعاً للشكل (20-4) وفق المعادلة الآتية:

$$\boxed{j_x = j_p \sin\varphi_p + j_n \sin\varphi_n = j_p\varphi_p + j_n\varphi_n\ ,} \tag{15-20}$$

حيث أن $\sin\varphi_p = \varphi_p$ و $\sin\varphi_n = \varphi_n$، وذلك بحكم صِغر الزاويتين φ_p و φ_n. يمكن التعبير عن هاتين الزاويتين من المخططين المتجهين الموضحين في الشكل (20-3). إذْ يوافق هذا الرسم حالة التوازن الديناميكي وبلوغ حقل هول قيمة مستقرة. إذن، لدينا:

$$\tan\varphi_p = \frac{\mathrm{E}_{xp}}{\mathrm{E}} = \frac{\mathrm{E}_{xp}}{j_p / ep\mu_p} \cong \varphi_p\ ; \tag{16-20}$$

$$\tan\varphi_n = \frac{\mathrm{E}_{xn}}{\mathrm{E}} = \frac{\mathrm{E}_{xn}}{j_n / en\mu_n} \cong \varphi_n\ . \tag{17-20}$$

كما يمكن الاستفادة من المعادلة (20-14) والتعبير عن الحقل E وفق الآتي:

$$\mathrm{E} = \frac{j_n}{\sigma_n} = \frac{j_n}{en\mu_p}\ ; \tag{18-20}$$

$$\mathrm{E} = \frac{j_p}{\sigma_p} = \frac{j_p}{ep\mu_p}\ . \tag{19-20}$$

وتبعاً للعلاقة (20-9) ومفعول هول من أجل نصف الناقل المدروس نستطيع كتابة العلاقتين:

$$\mathrm{E}_{xp} = \frac{A}{ep}\frac{I_p B}{ab} = \frac{A}{ep} j_p B\ ; \tag{20-20}$$

$$\mathrm{E}_{xn} = -\frac{A}{en}\frac{I_n B}{ab} = -\frac{A}{en} j_n B\ . \tag{21-20}$$

وبالتعويض عن المعادلات (20-21)-(20-18) في جملة المعادلتين (20-16) و (20-17)نجد أن:

$$\varphi_p = \frac{\mathrm{E}_{xp}}{\mathrm{E}} = \frac{A}{ep}\frac{j_p B}{\dfrac{j_p}{ep\mu_p}} = A\mu_p B\ ; \tag{22-20}$$

$$\varphi_n = \frac{\mathrm{E}_{xn}}{\mathrm{E}} = -\frac{A}{en}\frac{j_n B}{\dfrac{j_n}{en\mu_n}} = -A\mu_n B\ . \tag{23-20}$$

ولإيجاد زاوية الدوران الإجماليّة، φ، نعوض عن العلاقتين (20-22) و (20-23) في العلاقتين (20-14) و-(15-20) على الترتيب، حيث نجد أن:

$$j_x = j_p\left(A\mu_p B\right) + j_n\left(-A\mu_n B\right) = ep\mu_p\mathrm{E}\left(A\mu_p B\right) + en\mu_n\mathrm{E}\left(-A\mu_n B\right)$$

ومن ثمَّ

$$j_x = eA\left(p\mu_p^2 - n\mu_n^2\right)\mathrm{E}\,B\ , \tag{24-20}$$

ومن ثمَّ نعوض العلاقتين (20-14) و(20-24) في علاقة دوران φ، أي في المعادلة (20-13)، فنجد:

$$\varphi = \frac{j_x}{j_y} = \frac{eA\left(p\mu_p^2 - n\mu_n^2\right)\mathrm{E}\,B}{e\left(p\mu_p + n\mu_n\right)\mathrm{E}} = A\frac{p\mu_p^2 - n\mu_n^2}{p\mu_p + n\mu_n}B\ . \tag{25-20}$$

ومن جهة أخرى، يمكننا استناداً للعلاقة (20-22) كتابة المساواة الآتية:

$$\varphi_p = R_{xp}\sigma_p B . \qquad (26\text{-}20)$$

وبشكل مشابه يمكننا كتابة علاقة من أجل زاوية الدوران φ:

$$\varphi = R_x \sigma B \equiv R_x e\left(p\mu_p + n\mu_n\right)B .$$

ومن ثمَّ

$$\boxed{\varphi = R_x \sigma B ,} \qquad (27\text{-}20)$$

وبمقارنة العلاقتين (20-25) و(20-27) مع بعضهما البعض نجد أن:

$$R_x = \frac{A}{e\left(p\mu_p + n\mu_n\right)} \frac{p\mu_p^2 - n\mu_n^2}{\left(p\mu_p + n\mu_n\right)} .$$

ومن ثمَّ

$$\boxed{R_x = \frac{A}{e} \frac{p\mu_p^2 - n\mu_n^2}{\left(p\mu_p + n\mu_n\right)^2}} . \qquad (28\text{-}20)$$

بهذه الطريقة، نكون حصلنا على علاقة عامة من أجل معامل هول. ويتم الحصول على العلاقتين (20-10) و (20-11) من العلاقة الأخيرة (20-28)؛ كحالة خاصة، وذلك إذا وضعنا $n = 0$ أو $p = 0$.

ومن أجل نصف ناقل ذاتي $n = p = n_i$ حيث تتحقق الناقلية الذاتية، نجد من العلاقة ما (20-28) يأتي:

$$R_{xi} = \frac{A}{e} \frac{p}{p^2} \frac{\left(\mu_p - \mu_n\right)\left(\mu_p + \mu_n\right)}{\left(\mu_p + \mu_n\right)^2} ,$$

ومن ثمَّ

$$\boxed{R_{xi} = \frac{A}{en_i} \frac{\mu_p - \mu_n}{\mu_p + \mu_n}} . \qquad (29\text{-}20)$$

وطالما، في معظم الأحيان $\mu_p < \mu_n$ ، فإن معامل هول الذاتي يُعدُّ كميّة سالبة دوماً.

يتضح من العلاقتين (20-22) و (20-23) **أن زاويتي هول من أجل الثقوب والإلكترونات تتناسبان تناسباً طردياً مع حاصل ضرب الحركيّات في تحريضية الحقل المغنطيسي.**

إذن، إلى جانب الحركيّتين الانسياقيتين يمكن الحديث عن **حركيّتي هول** اللتان تُعيَّنان بالشكل الآتي:

$$\mu_{pH} = A\mu_p ; \qquad (30\text{-}20)$$

$$\mu_{nH} = A\mu_n . \qquad (31\text{-}20)$$

وعندما $A = 1$ ، تتطابق حركيّتا هول مع حركيَّتي الانسياق.

لقد استخدمنا سابقاً علاقات تقريبية على أساس أن الزوايا φ_p ، و φ_n ، و φ صغيرة، ومن ثمَّ، تسمى الحقول المغنطيسية من أجل تلك الزوايا الصغيرة حقولاً ضعيفةً. ويُعبَّر عن **معايير الحقل المغنطيسي الضعيف** بالمتراجحتين:

$$\boxed{\varphi_p = \frac{l_p}{r_p} = A\mu_p B = \mu_{pH} B << 1,} \tag{32-20}$$

$$\boxed{\varphi_n = \frac{l_n}{r_n} = A\mu_n B = \mu_{nH} B << 1,} \tag{33-20}$$

حيث l_p و l_n طول المسار الحر الوسطي للثقوب والإلكترونات على الترتيب،

و r_p و r_n نصفا قطري قوسي الدائرتين اللتين تدور وفقهما الثقوب والإلكترونات تحت تأثير قوة لورانتس على الترتيب.

- ✓ فمثلاً تتحقق المتراجحة، على وجه الخصوص، من أجل **Ge** عندما $\mu_n = 0.3\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{V\cdot s}}$ و $B = 1\,\mathrm{T}$.
- ✓ وطالما أن حركية الثقوب أقل من حركية الإلكترونات، فإن المتراجحة (32-20) محققة أيضاً.
- ✓ فضلاً عن أن التحريضية المغنطيسية، واحد تسلا $(1\,\mathrm{T})$، تُعدُّ ضعيفة– اصطلاحاً– فقط من وجهة نظر تحقق المتراجحتين.
- ✓ ويساوي معامل هول الواحد $(A = 1)$ في الحقول الشديدة التي تُعيَّن بالمتراجحتين المذكورتين المتعاكستين بالإشارة.
- ✓ ومن أجل المعادن وأنصاف النواقل المتحللة يكون $A = 1$ بصرف النظر عن قيمة B.

يُطبَّقُ مفعول هول على نطاق واسع في دراسة أنصاف النواقل؛ إذْ يمكن بسهولة تعيين كل من I، و B، و a، و V_x، تجريبياً؛ كما يتم الحصول على R_x في المجال المشوب من العلاقة (9-20). أضف إلى ذلك، إذا كانت آلية التبعثر معلومةً (قيمة A معلومة)، فليس من الصعب بمكانٍ تعيين التركيز n والتركيز p.

ثمة صعوبات أساسية يمكن أن تبرز عند قياس V_x؛

- **إذْ تُعيَّن هذه الكميّة** باستعمال مقياس كمون في حالة التيار المستمر (مقياس فولط DC) حيث يُقاس فرق الكمون بين مجسَّين (مسبارين) يمسَّان نصف الناقل في نقطتين تقعان على وجهين متقابلين (في الشكل (1-20) تقع هاتان النقطتان على الوجهين العلوي والسفلي). ويجب أن تتوزع هذه النقاط على سطح تساوي الكمون للتيار (أي على مستوي عمودي على منحى التيار) **بحيث يُستبعد قياس فرق الكمون الأومي** الناجم عن التوزّع غير المتناظر لتماسات هول.
- ولكن من الصعوبة بمكان، بلوغ عملية القياس هذه، ولا بد من قياس V_x من أجل قطبيتين للتيار I، بحيث يكون لفرق الكمون الأومي إشارتين مختلفتين، ومن ثمَّ يُحسب المتوسط الحسابي من معطيات القياسات المشار إليها لفرق الكمون V_x.
- **تتوفّر** عادةً في مجموعة القياس **مسابر** تتوزع على طول التيار في العينة، بحيث يمكن تحديد الناقلية النوعية لتلك المقاطع لتلك القطاعات من العينة (يمكن استعمال أحد هذه المسابر بمثابة تماس هول).

إن القياسات المركبة لـ R_x و σ تسمح بتحديد إشارة حاملات الشحنة، وتركيزها، وحركيّتها. فإذا وضعت وحدة القياس الحاوية على العيّنة في ترموستات، حيث يمكن بسهولة المحافظة على فارق حراري، فيمكننا دراسة التابعية الحرارية لتلك المقادير؛ R_x، و σ، و n، و μ.

21 الظواهر الغلفانية المغنطيسية والحرارية المغنطيسية المختلفة:

Different Galvanomagnetic and Thermomagnetic Phenomena

ينشأ مفعول هول نتيجة لتأثير قوة لورانتس. إذْ كما ذكرنا، ينتقل القسم الأكبر من حاملات الشحنة بسُرعٍ قريبةٍ من سرعة انسياق وسطية توافقها قيمة وسطية لقوة لورانتس. وهذه الحاملات لا تنحرف عن اتجاه الحقل الخارجي بسبب تعادل قوة لورانتس مع قوة حقل هول. ولكن إذا أخذنا بالحسبان المركبة الحرارية لسرعة الإلكترونات، يبدو أنه يمكن للسرعة الكليّة أن تتغير في حدود كبيرة. بهذا الشكل، توجد في نصف الناقل حاملات شحنة تختلف سرعاتها عن السرعة الوسطية، مما يعني إمكانية رصد مفاعيل فيزيائية تُعيَّن من خلال حاملات الشحنة هذه؛ وكقاعدة عامة، ستكون هذه المفاعيل "دقيقة" (بمعنى أن قيمة الكميّات الفيزيائية صغيرة) يتطلب رصدها إجراء تجارب مُتقنة وظروف إعدادٍ دقيقة كفايةً.

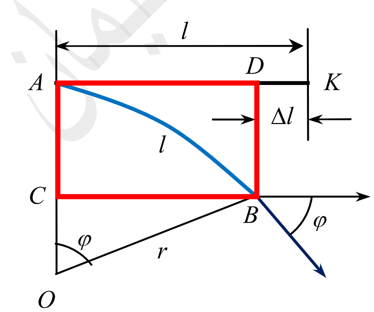
تُنسب إلى هذه المفاعيل **الظواهر الغلفانية المغنطيسية من نوع المقاومة المغنطيسية** أو تغيّر المقاومة في حقل مغنطيسي والظواهر المتمثلة **في ظهور فارق حراري طولاني أو عرضاني** أيضاً (**الظواهر المغنطيسية الحرارية**). أضف إلى ذلك، إن وجود حاملات شحنة "باردة" و"حارة" يُحدد سلسلة من المفاعيل المغنطيسية الحرارية:

- كنشوء فارق حراري إضافي في نصف ناقل واقع في حقل مغنطيسي خارجي يوجد فيه فارق حراري منذ البداية.
- ونشوء فرق كمون كهربائي في نصف ناقل فيه فارق حراري منذ البداية وواقع في حقل مغنطيسي خارجي.

دراسة المقاومة المغنطيسية– مفعول المقاومة المغنطيسية:

Study of the Magnetic Resistance- the Magneto-resistance Effect

لندرس تغير طول المسار الحر لحامل شحنة نتيجةً لانحرافه عن اتجاه حقل كهربائي خارجي $\vec{E}$، كما يوضح الشكل (21-1)، حيث نُجري حساباً بسيطاً على فرض أن مفعول هول لم يظهر بعدُ:



الشكل (21-1): تغير طول المسار الحر لحامل شحنة عند تبعثره بوجود حقل مغناطيسي

إن الطول الوسطي للمسار الحر، $l = AK$، يتناقص في $\vec{E}$ بمقدار

$$\Delta l = DK = l - AD\,,$$

فضلاً عن أن:

$$AD = AB\cos\varphi = l\cos\varphi = l\left(1-\frac{\varphi^2}{2}\right), \quad (1\text{-}21)$$

حيث تم نشر التجيب في متسلسلةٍ وأكتفي بالحدين الأول والثاني.

إذن،

$$\Delta l = l - AD = l - l\left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right) = l\,\frac{\varphi^2}{2}\,,$$
$$\therefore \frac{\Delta l}{l} = \frac{\varphi^2}{2}\,, \tag{2-21}$$

ومن أجل نصف ناقل من النوع p و n لدينا من العلاقتين (20-22) و (20-23):

$$\varphi_n = -A\mu_n B\,. \qquad , \qquad \varphi_p = A\mu_p B$$

وبفرض أن عامل هول A يساوي الواحد، نحصل من العلاقة (21-2) على المعادلتين الآتيتين:

$$\frac{\Delta l_p}{l_p} = \frac{\varphi_p^2}{2} = \frac{\mu_p^2 B^2}{2} = \frac{\Delta\rho_p}{\rho_p}\,; \tag{3-21}$$

$$\frac{\Delta l_n}{l_n} = \frac{\varphi_n^2}{2} = \frac{\mu_n^2 B^2}{2} = \frac{\Delta\rho_n}{\rho_n}\,. \tag{4-21}$$

يمكن القول هنا، أن **تغيّر** المقاومة النوعية يتناسب طردياً مع **تغيّر** الطول الوسطي للمسار الحر، وعندها يُفترض أن كل الحاملات الحرة للشحنة تنتقل بسرعة وسطية وتمتلك طول مسارٍ واحدٍ.

إن المقاومة الحجمية النوعية لنصف الناقل **تزداد** بانخفاض طول المسار الحر لحاملات الشحنة $(\rho_n = RS/l)$. وبهذا الشكل، نجد:

(1) عند **غياب** مفعول هول (بدقة أكبر إذا أهملنا وجوده)، **يبدو التغيّر النسبي للمقاومة النوعية لنصف الناقل متناسباً طردياً مع مربع حاصل ضرب حركيّة حاملات الشحنة في حقل التحريض المغنطيسي المطبق.**

(2) وعند وجود حقل هول الكهربائي E_x، فإن عملية الانحناء في مجال تأثير الحقل المغنطيسي، ومن ثمَّ تغيّر طول المسار الحر، ستُرصدان فقط من أجل **الحاملات الحارة (السّريعة)**؛ فضلاً عن أن الانحناء وتغيّر طول المسار الحر من أجل هذه الحاملات سيكونان أقل منهما بغياب حقل هول E_x. أمّا **الحاملات الباردة (البطيئة)** التي سرعاتها أقل بكثير من السرعة الوسطية، فستنحرف إلى الاتجاه المقابل (المعاكس لاتجاه انحراف الحاملات الحارة) تحت تأثير حقل هول، وهذا بدوره سيؤدي إلى زيادة المقاومة أيضاً.

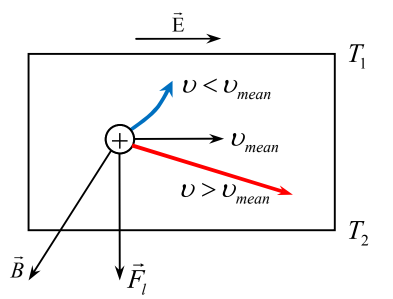
وهكذا نجد، أن المقاومة النوعية لنصف ناقل، واقع في حقل مغنطيسي عرضاني، **تزداد** على حساب **تقلص** طول مسار الحاملات الحارة والباردة للشحنة فقط، ومن الواضح أن التغيّر النسبي للمقاومة سيكون أقل مما تقتضيه العلاقتان (21-3) و (21-4).

دراسة مفعول ايتنغهاوزن ومفعول نرنست Studying the Ettingshausen and the Nernest Effects:

لندرس تغير طول المسار الحر لحامل شحنة نتيجةً لانحرافه عن اتجاه حقل كهربائي خارجي $\vec{\mathrm{E}}$، كما يوضح الشكل (21-1)، حيث نُجري حساباً بسيطاً على فرض أن مفعول هول لم يظهر بعدْ:

إن **ظاهرة** نشوء فارق حراري عرضاني، عند وضع نصف ناقل يجري فيه تيار كهربائي في حقل مغنطيسي عرضاني تسمَّى **مفعول ايتنغهاوزن**. يوضح الشكل (21-2) عدم انحراف حاملات الشحنة المتحركة بسرعة وسطية تحت تأثير الحقل المغنطيسي، في حين تنحرف الحاملات الحارة للشحنة نحو الوجه السفلي، لأن قوة لورانتس في هذه الحالة أكبر من قوة حقل هول، $e\mathrm{E}_x$، والحاملات الباردة تنحرف نحو الوجه السفلي على حساب العلاقة العكسية بين قوة لورانتس F_l والقوة $e\mathrm{E}_x$.

فعند اصطدام حاملات الشحنة مع الشبكة البلّورية، فإنها تتبادل الطاقة مع الذرات المكوِّنة لها بحيث تجري العملية في جملة "حاملات الشحنة– الشبكة البلّورية"، في كل عنصر حجم، لإقرار التوازن الترموديناميكي: **فالحاملات الحارة**، عندما تمنح جزءاً من طاقتها للشبكة البلّورية، **تُسخِّنُ** نصف الناقل، في حين إن **الحاملات الباردة**، عندما تكتسب جزءاً من طاقة الشبكة، **تُبرِّد** نصف الناقل. ومن ثمَّ يسخن أحد وجهي نصف الناقل ويبرد الوجه المقابل له: ففي الشكل (21-2) تكون درجة حرارة الوجه السفلي لنصف الناقل أعلى من درجة حرارة الوجه العلوي. ومن الواضح، أن:



الشكل (21-2): انحراف الثقوب عن مسارها في مفعول ايتنغهاوزن

$$\Delta T_{trans} = f(I, B). \tag{5-21}$$

يُعبَّر عن مفعول ايتنغهاوزن، على سبيل المثال، **بأجزاء مئوية من الدرجة لكل سنتيمتر**، وفي الأساس يمتلك قيمة نظريةً. وتتغيّر إشارة هذا المفعول عند تغيّر اتجاه الحقل المغنطيسي، ولذلك يُعدُّ **مفعولاً فردياً أو عرضانياً** (على غرار مفعول هول)، أي أن إشارته تتغيّر عند تغيّر اتجاه الحقل المغنطيسي.

يمكن أن ينشأ بالإضافة للفرق الحراري العرضاني، فرق حراري طولاني، وهي ظاهرة تدعى **مفعول نرنست**، بحيث أن:

$$\Delta T_{long} = f(I, B). \tag{6-21}$$

ينشأ مفعول نرنست على أثر تغيّر تدفقات الحاملات الحارة والساخنة للشحنة الكهربائية في اتجاه التيار الكهربائي. وعلى غرار المقاومة المغنطيسية يُعدُّ مفعول نرنست **مفعولاً زوجياً أو طولانياً**، أي أن إشارته لا تتغيّر عند تغيّر اتجاه الحقل المغنطيسي. عند تغيّر اتجاه التيار تتغيّر إشارة مفاعيل هول، وايتنغهاوزن، ونرنست.

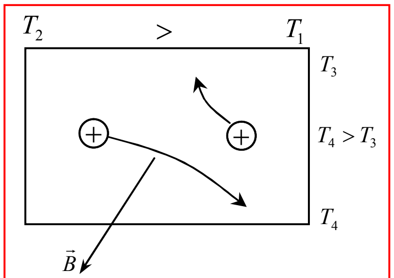
إن انسياق الإلكترونات والثقوب، في الاتجاه المعطى للتيار، متعاكس، أمّا انحرافها في الحقل المغنطيسي الناجم عن سرعة الانسياق فيكون متساوياً. وبفضل ذلك، تمتلك حقول هول في أنصاف النواقل الإلكترونية والثقبية إشارات متعاكسة، أمّا مفعولا ايتنغهاوزن ونرنست وكذلك المقاومة المغنطيسية فلا تتعلق بإشارة حاملات الشحنة.

دراسة الظواهر المغنطيسية الحرارية Studying the Thermomagnetic Phenomena:

يكمن **مفعول ريغ- لوديوك** في أنه إذا وجِد في نصف ناقل تدرجٌ حراريٌ طولانيٌ وتأمَّن حقل مغنطيسي عرضاني يُحيط به، فيمكن أن ينشأ تدرجٌ عرضانيٌ لدرجة الحرارة في نصف الناقل هذا، وعندها يكون لدينا

$$\Delta T_{trans} = f\left(\Delta T_{long}\ ,B\right). \qquad (7\text{-}21)$$

يوضح الشكل (21-3) ثقوباً "**حارة**" تنزاح تحت تأثير الحقل المغنطيسي العرضاني نحو الوجه السفلي لنصف الناقل أثناء انتقالها من اليسار نحو اليمين وثقوباً "**باردة**" تنزاح نحو الوجه العلوي لنصف الناقل في أثناء انتقالها من اليمين نحو اليسار.



الشكل (21-3): حركة الثقوب في مفعول ريغ- لوديوك

من الواضح أن الوجه السفلي **سيسخن**، في حين إن الوجه العلوي **سيبرد**، مما يعني ظهور تدرج حراري عرضاني في نصف الناقل المدروس.

إن مفعول ماج- ريغ- لوديوك يشابه المفعول الأخير، إلاَّ أنه طولاني (أي إذا وجد في نصف ناقل تدرجٌ عرضانيٌ لدرجة الحرارة وحقل مغنطيسي عرضاني يُحيط به، فيمكن أن ينشأ فيه تدرجٌ طولانيٌ لدرجة الحرارة). في هذه الحالة يكون لدينا:

$$\Delta T_{long} = f\left(\Delta T_{trans}\ ,B\right). \qquad (8\text{-}21)$$

توجد مفاعيل أخرى غير التي ذكرنها سابقاً، وهي مفعولات ايتنغهاوزن- نرنست العرضانية والطولانية: المفعول العرضاني يكمن في ظهور فرق كمون عرضاني عند توافر فرق حراري طولاني وحقل مغنطيسي عرضاني، والمفعول الطولاني يتجلى في تشكّل فرق كمون طولاني على طول التدرج الحراري الطولاني، وليس العرضاني، بوجود حقل مغنطيسي عرضاني أيضاً. ومن ثمَّ:

$$\Delta V_{trans} = f\left(\Delta T_{long}\ ,B\right). \qquad (9\text{-}21)$$

$$\Delta V_{long} = f\left(\Delta T_{long}\ ,B\right). \qquad (10\text{-}21)$$

22 معادلات الانتثار ومعادلة اينشتاين Diffusion Equations- Einstein Equation:

يمكن تأمين تدرج لتركيز الحاملات الحرة للشحنة على طول بلورة نصف ناقلة أو عازلة بطرائق مختلفة؛ عن طريق إنماء بلّورة وحيدة من مادة نصف ناقلة بحيث يتغيّر تركيز الشوائب فيها في اتجاه ما وفق قانون معطى. يتغيّر تركيز الشوائب في أنصاف النواقل والعوازل اللامتجانسة من نقطةٍ لأخرى، لاسيما عند تخوم اللاتجانسيات؛ وفي مثل هذه الحالات يُعدُّ التركيز المتوازن لحاملات الشحنة (الإلكترونات والثقوب) تابعاً للإحداثيات. سندرس لاحقاً أنصاف نواقل وعوازل يمكن أن تكون فيها الحاملات الحرة للشحنة أيونات وفجوات أيونية (ثقوب متأينة).

وبشكل مشابه، يمكن خلق تدرج لتركيز الحاملات المتوازنة في نصف ناقل (أو عازل) متجانس على حساب التدرج الحراري.

معادلات الانتثار Diffusion Equations

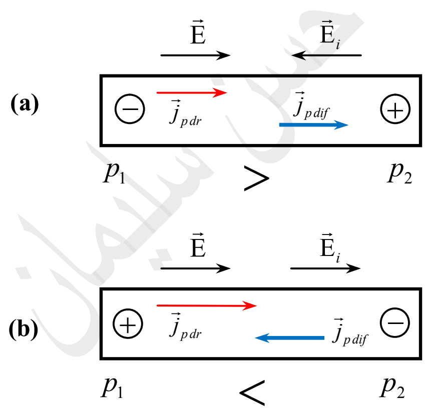
يتألف التيار في الحالة العامة من مجموع تيارات الانسياق والانتثار. وتتعيَّن **مركِّبات الانسياق** لكثافة تيار الناقلية من قانون أوم:

$$\vec{j}_{n\,dr} = \sigma_n \vec{\mathrm{E}} = en\mu_n \vec{\mathrm{E}} = -en\mu_n \overrightarrow{grad}\,\varphi\,; \qquad (1\text{-}22)$$

$$\vec{j}_{p\,dr} = \sigma_p \vec{\mathrm{E}} = ep\mu_p \vec{\mathrm{E}} = -ep\mu_p \overrightarrow{grad}\,\varphi\,, \qquad (2\text{-}22)$$

حيث φ الكمون الكهراكدي، و n تركيز الإلكترونات و p تركيز الثقوب التي تُعدُّ في الحالة العامة متوازنةً، و e القيمة المطلقة لشحنة الإلكترون.

والمركبة الانتثارية للتيار تتعلق بتدرج تركيز الحاملات الحرة للشحنة؛ إذْ يوضح الشكل (22-1) حالتين، توافقان تيار الثقوب. في الحالة **الأولى**، $p_1 > p_2$: ما يعني أن عملية الانتثار ومن ثمَّ تيار الانتثار الموافق تتجهان باتجاه تيار الانسياق نفسه. وفي الحالة **الثانية**، $p_2 > p_1$: ما يعني أن عملية الانتثار تجري بشكل معاكس لما يجري في الحالة الأولى، ويتجه تيار الانتثار في اتجاه معاكس لاتجاه تيار الانسياق.



الشكل (22-1): تيارا الانتثار والانسياق.

يمكن كتابة علاقتي **كثافتي** الانتثار لتدفق الإلكترونات والثقوب على الترتيب بالشكل:

$$\Phi_{n\,dif} = -D_n \overrightarrow{grad}\,n\,; \qquad (3\text{-}22)$$

$$\Phi_{p\,dif} = -D_p \overrightarrow{grad}\,p\,. \qquad (4\text{-}22)$$

حيث D_n معامل انتشار الإلكترونات و D_p معامل انتشار الثقوب.

تعني الإشارة "−" أن الانتقال يجري في اتجاه تناقص التركيز.

توافق كثافتا الانتثار لتدفقات الإلكترونات والثقوب كثافتي الانتثار لتيارات الإلكترونات والثقوب وفق الشكل الآتي:

$$\vec{j}_{n\,dif} = -e\Phi_{n\,dif} = eD_n\,\overrightarrow{grad}\;n\,; \qquad (5\text{-}22)$$

$$\vec{j}_{p\,dif} = +e\Phi_{p\,dif} = -eD_p\,\overrightarrow{grad}\;p\,; \qquad (6\text{-}22)$$

أخذنا بالحسبان إشارة شحنة الإلكترون، حيث $e > 0$، في العلاقتين الأخيرتين (22-5) و (22-6).

يُشكِّل تيار الانتثار فصلاً (تباعداً) فراغياً بين الشحنات، أي تنشأ شحنات حجمية بفعل الانتثار، وستختلف تراكيز حاملات الشحنة هنا عن تراكيزها المتوازنة n_0 و p_0. وعلى وجه الخصوص، سينشحن الجزء الأيسر من العيّنة النصف ناقلة في الشكل (22-1a) سلبياً والجزء الأيمن منها إيجابياً، أمّا في الشكل (22-1b)، فنلاحظ حالة معاكسة للحالة السابقة وقطبية مخالفة. وبناءً عليه، تنشأ حقول كهربائية داخلية، $\vec{\mathrm{E}}_i$، تُكوِّنُ إلى جانب الحقل الخارجي، $\vec{\mathrm{E}}$، تيار انسياقٍ. إذن:

$$\vec{\mathrm{E}}_t = \vec{\mathrm{E}} + \vec{\mathrm{E}}_i\,. \qquad (7\text{-}22)$$

وإذا كان الحقل الخارجي يساوي الصفر ونصف الناقل معزول عن الأجسام الأخرى، فإن تيار الانتثار يتوازن مع تيار الانسياق الذي شكَّله الحقل الداخلي $\vec{\mathrm{E}}_i$، ومن ثمَّ سيساوي التيار الكليّ في حالة التوازن الترموديناميكي الصفر. ويُفهم التوازن الترموديناميكي هنا بالمعنى الآتي: إن توزّع درجة الحرارة في العيّنة يبقى محفوظاً مع مرور الزمن من دون تغيير. لقد صادفتنا حالة مفصَّلة عند دراسة القوة المحرِّكة الكهراحرارية T-emf في الفقرة 19.

وبناءً على ما تقدم يمكن كتابة معادلات الانتثار بشكل عام بالمعادلتين الآتيتين:

$$\vec{j}_n = en\mu_n\vec{\mathrm{E}} + eD_n\,\overrightarrow{grad}\,n = -en\mu_n\,\overrightarrow{grad}\,\varphi + eD_n\,\overrightarrow{grad}\,n\,; \qquad (8\text{-}22)$$

$$\vec{j}_p = en\mu_p\vec{\mathrm{E}} - eD_p\,\overrightarrow{grad}\;p = -ep\mu_p\,\overrightarrow{grad}\,\varphi - eD_p\,\overrightarrow{grad}\;p\,. \qquad (9\text{-}22)$$

إذا أخذنا في الحسبان مساقط التيارات في اتجاه واحد فقط، يمكننا استبدال التدرجات بالمشتقات الجزئية الموافقة.

في معظم الحالات تُدرس التيارات في اتجاهٍ معيّنٍ، لأن التدرجات غالباً ما تختلف عن الصفر من أجل اتجاه واحد؛ فمثلاً من أجل الاتجاه x يكون لدينا:

$$j_{nx} = en\mu_n\mathrm{E}_x + eD_n\frac{\partial n}{\partial x} = -en\mu_n\frac{\partial \varphi}{\partial x} + eD_n\frac{\partial n}{\partial x}\,; \qquad (10\text{-}22)$$

$$j_{px} = ep\mu_p\mathrm{E}_x - eD_p\frac{\partial p}{\partial x} = -ep\mu_p\frac{\partial \varphi}{\partial x} - eD_p\frac{\partial p}{\partial x}\,. \qquad (11\text{-}22)$$

نغض النظر عادةً عن الأدلة "x" على اعتبار أننا نُدرك المسقط الذي اخترناه، بهدف التبسيط؛ وعندها تكون الدراسة الراهنة من أجل حالة أحادية البعد، حيث نعتبر فيها:

$$j_{ny} = j_{nz} = j_{py} = j_{pz} = 0\,;$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0\,; \qquad (12\text{-}22)$$
$$\frac{\partial n}{\partial y} = \frac{\partial n}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0\,.$$

وعندها تُكتب معادلات الانتثار بالشكل:

$$j_n = en\mu_n \mathrm{E} + eD_n \frac{\partial n}{\partial x}\,; \qquad (13\text{-}22)$$

$$j_p = ep\mu_p \mathrm{E} - eD_p \frac{\partial p}{\partial x}\,. \qquad (14\text{-}22)$$

والكثافة الكليّة للتيار بالشكل الآتي:

$$\boxed{j = j_n + j_p = e\left(n\mu_n + p\mu_p\right)\mathrm{E} + e\left(D_n \frac{\partial n}{\partial x} - D_p \frac{\partial p}{\partial x}\right).} \qquad (15\text{-}22)$$

تُعيَّنُ اتجاهات التيارات عادةً تبعاً لاتجاهات تدرجات الكمون φ والتراكيز. **ومن ثمَّ** تؤخذ بالحسبان إشارات التيارات عند كتابة معادلة الانتثار من أجل الحالة المعطاة. إنَّ معادلات الانتثار تُعدُّ من أهم معادلات فيزياء أنصاف النواقل والعوازل وتُستخدم على نطاق واسع في مختلف الحسابات.

معادلة اينشتاين Einstein Equation

تمتاز علاقة (معادلة) اينشتاين بسلوكها العام، إذْ أنها تُطبَّق على الحاملات الحرة للشحنة من أي نوعٍ، سواء كانت إلكترونات، أمّ ثقوب، أمّ أيونات، أمّ فجوات مؤيّنة. وهي محققة من أجل الحاملات المتوازنة وغير المتوازنة في أنصاف النواقل والعوازل.

تربط معادلة اينشتاين معامل انتشار حاملات الشحنة بحركيتها في شروط التوازن الترموديناميكي، غير أنها، وكما أشرنا أعلاه، محققة من أجل الحاملات اللامتوازنة للشحنة أيضاً. والسبب هو أن هذه **الحاملات اللامتوازنة تُصبح في حالة توازن حراري مع الشبكة البلّورية للعينة المدروسة خلال فترة زمنية قصيرة جداً**. وعليه، فإن توزّع الحاملات اللامتوازنة للشحنة على الطاقات في أنصاف النواقل **اللامتحللة** لا تختلف عن توزّع الحاملات المتوازنة للشحنة.

لنوجد معادلة اينشتاين من أجل نصف ناقل من النوع-*p* يتميّز بتدرجٍ طولي لتركيز حاملات الشحنة، كما في الشكل (2-22). إذا كان تركيز الثقوب من جهة اليسار، p، أكبر من تركيزها من جهة اليمين، p_1 ، فإن تيار الانتثار سيتخذ اتجاهاً يبدأ من يسار العيّنة وينتهي في يمينها. سينقل تيار الانتثار الثقوب من اليسار إلى اليمين ويستمر بذلك ما لمْ ينشأ حقل داخلي، $\vec{\mathrm{E}}_i$ ، بتلك القيمة التي من أجلها يتساوى تيار الانسياق المقابل (الناتج عن الحقل ذاته) مع تيار الانتثار. وهذا ما سيكون عليه شرط التوازن الديناميكي الذي جرى الحديث عنه أكثر من مرة. وعليه، فإن:

$$j_p = -ep\mu_p \frac{\partial \varphi}{\partial x} - eD_p \frac{\partial p}{\partial x} = 0\,, \qquad (16\text{-}22)$$

حيث φ الكمون الكهراكدي الذي تشكَّل بالشحنات الحجمية (الفراغية).

لنأخذ مبدأ حساب الكمون الكهراكدي φ، كما في الشكل (22-2)، بحيث نعتبر قيمته في النهاية اليسرى من العينة مساويةً للصفر. يجب على الثقوب المشاركة في تيار الانتثار أن تتسلق (تصعد) حاجز كمون، $e\varphi$.

لدينا من المعادلة (22-16)

$$\frac{\partial p}{p} = -\frac{\mu_p}{D_p}\partial \varphi\,; \qquad (17\text{-}22)$$

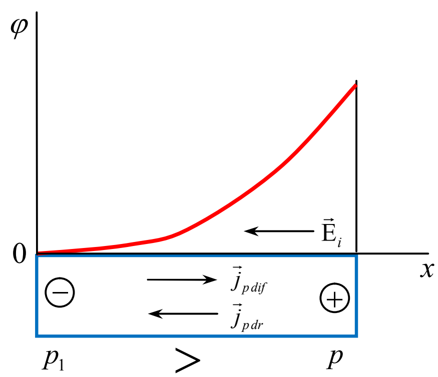
وبتكامل طرفي المعادلة الأخيرة نحصل على الحل الآتي بالنسبة لتركيز الثقوب p:

$$\int_{p_1}^{p} \frac{dp}{p} = -\frac{\mu_p}{D_p}\int_{p_1}^{p} d\varphi\,;$$

$$\ln p - \ln p_1 = -\frac{\mu_p}{D_p}\left(\varphi_p - \varphi_{p_1}\right)$$

(18-22)

$$p = p_1 \mathrm{e}^{-\frac{\mu_p}{D_p}\varphi}\,; \qquad \varphi_p = \varphi\,.$$



الشكل (22-2): نصف ناقل ثقبي فيه تدرج طولاني لتركيز الثقوب.

ومن جهة أخرى، يمكننا من خلال تطبيق قانون بولتزمان، من أجل شحنة تتسلق حاجز كمون ارتفاعه $e\varphi$ نتيجة حركتها الحرارية، كتابة المعادلة الآتية:

$$p = p_1\, \mathrm{e}^{-\frac{e\varphi}{k_B T}}\,. \qquad (19\text{-}22)$$

ويُعدُّ هذا التركيز متوازناً ترموديناميكياً أيضاً، طالما أن قانون بولتزمان يوافق حالة توازن. ولكن، بما أنه لدينا شحنات حجمية، فإننا رمزنا لهذا التركيز بالرمز p_1 بدلاً من p_0.

ونحصل من مقارنة المعادلتين (22-18) و (22-19) مع بعضهما البعض على معادلة اينشتاين من أجل الثقوب:

$$\frac{\mu_p}{D_p} = \frac{e}{k_B T}\,. \qquad (20\text{-}22)$$

وبطريقة مشابهة لما قمنا به أعلاه نحصل على علاقة اينشتاين من أجل الإلكترونات:

$$\boxed{\frac{\mu_n}{D_n} = \frac{e}{k_B T}\,.} \qquad (21\text{-}22)$$

إن العلاقتين (22-20) و (22-21) محققتان من أجل الأيونات أيضاً.