كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الثالثة**

المادة : الكتروديناميك

المحاضرة: الخامسة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

المحاضرة الخامسة

★ حركة الجسيمات المشحونة في الحقول المغناطيسية المتغيرة ببطء

1 - شرطا تقريب التغير البطيء للحقل المغناطيسي

نتنقل إلى بحث وهي حركة الجسيمات المشحونة في الحقول المغناطيسية المتغيرة ببطء في المكان والزمان ، يُعد اجراء تكامل معادلات الحركة في الحالة العامة التي تكون فيها الحقول المؤثرة متغيرة مسألة على درجة كبيرة من الصعوبة. لذلك نكتفي هنا بمعالجة الحالات الخاصة التي تتغير فيها الحقول مع الزمن ببطء في أثناء الانتقال من نقطة إلى نقطة أخرى مجاورة.

- اذا كان الحقل المغناطيسي المؤثر يتغير ببطء في المكان والزمن كأن بإمكان الجسيم المشحون المتحرك فيه ، القيام بعدد كبير من اللفات في مساره قبل أن يتغير هذا الحقل بشكل ملموس وتكون عندئذٍ هذه الحركة من الناحية العملية ، كما لو أن الحقل يبقى ثابتاً
- اعتماداً على ذلك يمكن تتبع حركة المركز اللحظي لدوران الجسيم ، أو كما يسمى عادة المركز المتقدم للحركة ، بديلاً عن حركة الجسيم بالذات. لكن يجب أن نأخذ بالحسبان ظهور حقل الكهربائي ، ولو ضعيفاً نسبياً عندما يكون الحقل المغناطيسي متغيراً مع الزمن لأنه وفق معادلة ماكسويل

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

يترتب على تغير الحقل المغناطيسي بالنسبة للزمن ظهور حقل كهربائي التقافي يضاف إلى الحركة الانسحابية للمركز المتقدم ، التي تعد بدورها حركة دورانية للجسيم المشحون الذي يقع تحت تأثير حقل مغناطيسي ضعيف ، وحقل كهربائي متولد لحركة أخرى دورانية لهذا الجسيم حول خطوط الحقل المغناطيسي ، بالتالي تكون حركة الجسيم حركة دورانية في دائرة نصف قطرها R_c

وحركة انجراف لمركز هذه الحركة الدورانية. وتكون معالجة هذه المسألة بالشكل الموصوف أعلاه معالجة صحيحة وفقاً للاعتبارين السابقين إذا كان تغير نصف قطر الدائرة خلال دورة واحدة، أقل بشكل ملموس من نصف قطر الدوران بالذات. ومن الواضح أن هذا الشرط يتحقق بشكل جيد.

- إذا كان الزمن المميز لتغير الحقل Δt^{char}_{Field} أكبر بشكل ملحوظ من الزمن اللازم لإنجاز دورة (لفة) واحدة T_c، وإذا كان البعد المميز لتغير الحقل ΔL^{char}_{Field}، أكبر بشكل كبير من نصف قطر الدوران R_c

$$(9.1)\quad \Delta t^{char}_{Field} \gg T_c \quad ; \quad \Delta L^{char}_{Field} \gg R_c$$

بالإمكان معاودة صياغة هذين الشرطين كمياً، بالشكل التالي:

$$(9.2)\begin{cases} T_c \left|\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right| \ll |\vec{B}| \Rightarrow \dfrac{1}{\omega_c}\left|\dfrac{\partial B/\partial t}{B}\right| \ll 1 \\ R_c \left|\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial r}\right| \ll |\vec{B}| \Rightarrow R_c \left|\dfrac{\partial \vec{B}/\partial \vec{r}}{\vec{B}}\right| \ll 1 \end{cases}$$

وبشكل مشابه يمكن تعيين الشرطين اللازمين لتغيرات الحقل الكهربائي حتى يمكن عدّه حقلاً متغيراً ببطء.

من الملاحظ أن الشرطين (9.2) يكونان محققان بشكل أفضل، كلما كانت قيمة الحقل المغناطيسي أكبر، لأن التواتر ω_c، يزداد بشكل طردي بازدياد قيمة هذا الحقل، أما نصف القطر R_c، فيتناسب عكساً مع قيمة الحقل المذكور.

- حتى تكون المعالجة صحيحة، يجب أن لا تكون قيمة $\vec{E}$ كبيرة جدا" فعلى مدى دورة (لفة) واحدة، يجب أن لا تتغير سرعة الجسيم بشكل كبير، ويجب أن يحقق هذا التغير الشرط التالي:

$$\delta v \sim \frac{q}{m} E . T_c \sim \frac{qE}{m\omega_c} \equiv \frac{E}{B} << v$$

أو بكلام أكثر دقة، يجب أن يتم تطبيق الشرط التالي على قيمة الحقل الكهربائي:

$$E << vB \qquad (4.3)$$

فإذا كانت قيمة الحقل الكهربائي كبيرة، كان بالإمكان إهمال تأثير الحقل المغناطيسي $\vec{B}$. بالتالي لا يمكن عندئذٍ حدوث انجراف. أما عندما تكون قيمة $\vec{E}$ صغيرة نسبيا" بالمقارنة مع قيمة الحقل $\vec{B}$، فإن الجسيم المشحون يتأثر بالحقل المغناطيسي وينجرف ببطء تحت تأثير الحقل الكهربائي.

عند تحقق الشروط المذكورة (4.2)، (4.3) يكون المسار الفعلي للجسيم مسارا" لولبيا"، مشوها" بعض الشيء، ويتغير نصف قطره وخطوته ببطء. تسمى حركة المركز المتقدم بالانجراف، ويسمى التقريب الذي يعين حركة هذا المركز المتقدم، عند إهمال الدوران الحاصل، تقريب الانجراف

2- لا تغير للعزم المغناطيسي M ، في الحقل المغناطيسي المتجانس ضعيف التغير مع الزمن.

بافتراض أن الجسيم المشحون يدور بتواتر زاوي ω في المستوي العمودي على الحقل المغناطيسي، عندئذٍ يتحقق الشرط

$$T_c \left|\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right| \ll |\vec{B}|$$

ونظراً لكون الحقل يتغير مع الزمن، فإن:

$$\int \vec{E}.d\vec{\ell} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.\vec{ds} \qquad (4.4)$$

نضرب (4.4) بالشحنة q ولنفرض أن الكمية $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ تبقى ثابتة خلال زمن اللفة (الدورة) الواحدة، فنجد:

$$q\oint \vec{E}.d\vec{\ell} = -q\left|\frac{\partial B}{\partial t}\right| \pi R_c^2 \qquad (4.5)$$

يعني الطرف الأيسر من هذه العبارة العمل المسلط على الجسيم المشحون من خلال الحقل الكهربائي، خلال اللفة الواحدة، ويساوي تزايد الطاقة الحركية في المستوي (xy)، لنرمز لهذا التزايد بالرمز $\Delta\varepsilon_1$ عندئذٍ يكون:

$$\Delta\varepsilon_1 = -q\pi R_c^2\left|\frac{\partial B}{\partial t}\right| = |q|\pi R_c^2\left|\frac{\partial B}{\partial t}\right| \qquad (4.6)$$

وتدل الإشارة السالبة أن الجسيم المشحون، الذي إشارة شحنته سالبة يتحرك في الاتجاه المعاكس للاتجاه الموجب في أثناء المكاملة على المنحني المغلق لحساب المشتق $\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t}$

نلاحظ من (4.6) أن:

$$\frac{\delta \mathcal{E}_1}{\delta t} = \frac{\Delta \mathcal{E}_1}{T_c} = \frac{|q| \pi R_c^2 \omega_c}{2\pi} \left| \frac{\delta \vec{B}}{\delta t} \right|$$

$$= \frac{\frac{1}{2} m v_1^2}{B} \left| \frac{\delta B}{\delta t} \right| \qquad (4.7)$$

- يعين العزم المغناطيسي $\vec{M}$ لتيار شدته I ، يسري في عروة مساحتها S بالشكل التالي:

$$\vec{M} = I \vec{S} \qquad (4.8)$$

علماً أن $\vec{S}$ السطح المتجه لهذه العروة

فإذا كانت الشحنة $|q|$ تتحرك على محيط عروة دائرية نصف قطرها

$$R_c = \frac{m v_1}{|q| B}$$

وكان دور حركتها

$$T_c = \frac{2\pi R_c}{v_1}$$

نجد أن قيمة العزم المغناطيسي M المعين في (4.8) تكون

$$M = \frac{|q|}{T_c} \pi R_c^2 = \frac{\frac{1}{2} m v_1^2}{B} = \frac{\mathcal{E}_1}{B} \qquad (4.9)$$

وتأسيساً على ذلك ، نعاود كتابة (4.7) بالشكل:

$$\frac{\delta \mathcal{E}_1}{\delta t} = M \left| \frac{\delta \vec{B}}{\delta t} \right| \qquad (4.10)$$

من جهة أخرى نلاحظ (4.9):

$$\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(MB) = M\frac{\partial B}{\partial t} + B\frac{\partial M}{\partial t} \quad (4.11)$$

من مقارنة (4.10) مع (4.11) نلاحظ أن:

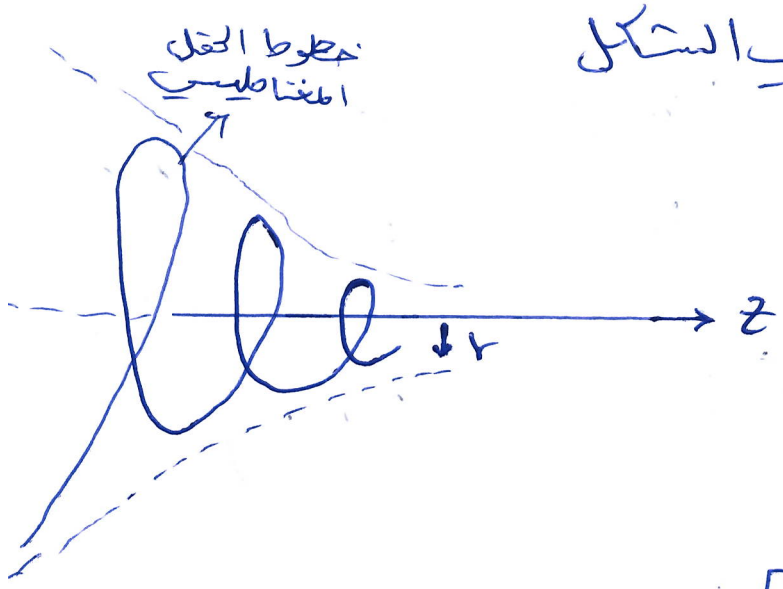
$$\frac{\partial M}{\partial t} = 0 \Rightarrow M = const \quad (4.12)$$

أي أن العزم المغناطيسي للجسيم المشحون، المتحرك في حقل مغناطيسي، متغير ببطء مع مرور الزمن يبقى عزماً ثابتاً.

3 _ لا يتغير العزم المغناطيسي M في الحقل المغناطيسي المستقر ضعيف لامتجانس

بالإمكان الحصول على نتيجة مماثلة عند معالجة حركة الجسيم المشحون في حقل مغناطيسي مستقر لكن يتغير ببطء من نقطة إلى نقطة أخرى مجاورة.

- إذا كان الحقل المغناطيسي محمولاً على المحور oz وفي اتجاهه وكانت شدته تتزايد ببطء بازدياد z، عندئذٍ تتقارب خطوط الحقل كما هو موضح في الشكل



- لنفرض أن تغير هذا الحقل مسافة من مرتبة R_c هو تغير صغير

$$R_c \left|\frac{\partial B}{\partial z}\right| << |\vec{B}| \qquad (4.13)$$

لنأخذ بالحسبان أن المركبة القطرية للحقل المغناطيسي B_r تكون في هذه الحالة مختلفة عن الصفر، لأن الحقل المغناطيسي يتغير على طول المحور oz، فنجد أن معادلة ماكسويل $\vec{\nabla}.\vec{B}=0$ تأخذ عندئذٍ في الإحداثيات الاسطوانية (r, θ, z) الشكل

$$\vec{\nabla}.\vec{B} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial}(r B_r) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \qquad (4.14)$$

حيث $\vec{B} = \vec{B}\{B_r, 0, B_z\}$

من ذلك ينتج أن:

$$\frac{\partial}{\partial r}(rB_r) = -r\frac{\partial B_z}{\partial z}$$

بإجراء مكاملة هذه العبارة، مع إهمال تابعية $\left(\frac{\partial B_z}{\partial z}\right)$ للمتحول r على طول محيط اللفة الواحدة، التي نصف قطرها $r \sim R_c$ عملاً بالتقريب (4.13) نجد أن

$$B_r \simeq -\frac{r}{2}\frac{\partial B_z}{\partial z}$$

ونظراً لأن B_r صغيرة بالمقارنة مع المركبة B_z، من أجل جميع قيم $r < R_c$ يكون بالإمكان وضع $|\vec{B}| \simeq B_z$، أي أن الحقل المغناطيسي يكون بشكل تقريبي محمولاً على المحور oz فلا يصنع معه إلا زاوية صغيرة. عندئذٍ ليكن معاودة كتابة العبارة السابقة للمركبة B_r بالشكل التقريبي:

$$B_r \simeq -\frac{r}{2}\frac{\partial |\vec{B}|}{\partial z} \qquad (4.15)$$

فإذا كانت مركبة الحقل B_r، مختلفة عن الصفر $(B_r \neq 0)$، كان الجسيم المشحون، المتحرك في الحقل المغناطيسي في المستوى $(x\,y)$ حركة دائرية بتواتر يساوي لها، خاضعاً بدوره إلى تأثير قوة محولة على المحور oz، تعمل على إنقاص مركبة سرعة هذا الجسيم على المحور المذكور، بالتالي تعمل هذه القوة على إعاقة الحركة في اتجاه تزايد الحقل المغناطيسي. أو بكلام آخر تعمل هذه القوة على طرد الجسيم في اتجاه تناقص الحقل عند انزياحه من المناطق التي يكون فيها الحقل ضعيفاً إلى المناطق الأخرى، التي يكون فيها الحقل أكثر شدة.

- بالإمكان تعيين هذه القوة $\vec{F}_z$ بالشكل التالي بملاحظة أن:

$$\vec{v} \wedge \vec{B} = \left[(\vec{v}_1 + \vec{v}_{//}) \wedge \vec{B}\right] = (\vec{v}_1 \wedge \vec{B}) = v_1 \wedge (\vec{B}_z + \vec{B}_r)$$

$$= \vec{v}_1 \wedge \vec{B}_z + \vec{v}_1 \wedge \vec{B}_r$$

نجد أن:

$$\vec{F} = q(\vec{v} \wedge \vec{B}) = q(\vec{v}_1 \wedge \vec{B}_z) + q(\vec{v}_1 \wedge \vec{B}_r)$$

$$= \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

حيث تعين $\vec{F}_1 = q(v_1 \wedge B_z)$ القوة، التي تعمل على تحريك المشحون في اتجاه تزايد الحقل المغناطيسي.

أما $\vec{F}_2 = q(\vec{v}_1 \wedge \vec{B}_r)$ فهي القوة التي تعمل على إعاقة حركة الجسيم في اتجاه تزايد الحقل، وتبعاً لهذه القوة $\vec{F}_2$، تحقق مركبة سرعة الجسيم على المحور oz معادلة الحركة:

$$m \frac{\delta v_z}{\delta t} = 191\, v_1 B_r$$

باستخدام (4.15) وملاحظة أن $r \simeq R_c = \frac{m v_1}{|q| B}$

والأخذ بالحسبان (4.9) نجد أن:

$$m \frac{\delta v_z}{\delta t} = -\frac{|q|}{2} v_1 R_c \frac{\delta B}{\delta z} = -M \frac{\delta B}{\delta z} \qquad (4.16)$$

نضرب (4.16) في v_z حيث $v_z = \frac{\delta z}{\delta t}$ فنجد:

$$\frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{1}{2} m v_z^2\right) = -M \frac{\delta B}{\delta t}$$

ونظراً لأن الطاقة الحركية الكلية للجسيم المشحون تبقى منحفظة في أثناء حركته في الحقل المغناطيسي

$$\frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} m v_z^2\right) = 0$$

فإننا نلاحظ أن العبارة السابقة تأخذ الشكل:

$$\frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{1}{2} m v_1^2\right) = M \frac{\delta B}{\delta t}$$

فإذا أخذنا بالحسبان (4.9) نعاود الكتابة على الشكل التالي

$$\frac{\delta}{\delta t}(MB) = M \frac{\delta B}{\delta t}$$

ولا يتحقق هذا إلا إذا كان

$$M = const \qquad (4.17)$$

★ تابعا لاغرانج وهملتون للجسيمات المتحركة في الحقل الكهراطيسي:

من المعلوم في الميكانيك التحليلي أن معادلة لاغرانج تأخذ الشكل:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_R} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \qquad (6.1)$$

علماً أن تابع لاغرانج L ، q_k الإحداثيات المعممة و $(k=1,2,\dots 3N)$ هي عدد درجات الحرية

يعين تابع لاغرانج على النحو التالي:

$$L = T(\dot{q}_k) - U(q_k) \qquad (6.2)$$

ورمز T إلى الطاقة الحركية ، U إلى الطاقة الكامنة

هذا وقد تكون الطاقة الكامنة تابعة للإحداثيات المعممة q_k وكذلك السرعات $\dot{q}_k$ وفي هذه الحالة، يعين تابع لاغرانج بالشكل:

$$L = T(\dot{q}_k) - U(q_k, \dot{q}_k) \qquad (6.2')$$

عندئذٍ تأخذ معادلة لاغرانج الشكل التالي:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial U}{\partial q_k} = 0 \qquad (6.3)$$

من أهم مثال على هذه الحالة حركة الجسيم المشحون في الحقل الكهراطيسي

نعلم أن

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad , \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \qquad (6.4)$$

ومن الممكن الحصول على معادلة حركة هذا الجسيم من (6.3)، اذا كانت الطاقة الكامنة معينة بالعبارة:

$$U = q\varphi - q\,\vec{A}.\vec{U} \qquad (6.5)$$

عندئذٍ بوضع (6.5) في (6.3)، على أن

$$T = \frac{1}{2} m v^2$$

نجد:

$$m\frac{dv}{dt} = -q\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - q\vec{\nabla}\varphi + q\vec{\nabla}(\vec{A}.\vec{U}) \qquad (6.6)$$

، بافتراض أن السرعة ثابتة، نلاحظ أن:

$$\vec{\nabla}(\vec{A}.\vec{U}) = (\vec{U}.\vec{\nabla})\vec{A} + \vec{U}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{A})$$

فإذا أخذنا بالحسبان أن:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{U}.\vec{\nabla})\vec{A}$$

بالتالي، بوضع هذه المعطيات في (6.6) مع استخدام (6.4) نجد:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -q\vec{\nabla}\varphi - q\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + q\vec{U}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{A})$$

$$= q(\vec{E} + \vec{U}\wedge\vec{B}) \qquad (6.7)$$

وهي قوة لورانتز

يتضح من ذلك أن الطاقة الكامنة، تعين فعلاً بالشكل المعطى في (6.5)، وبالتالي تابع لاغرانج، بالعبارة التالية:

$$L = T - U = \frac{1}{2} m v^2 - q(\varphi - \vec{A}.\vec{U}).$$

وتأسيساً على ذلك نجد أن الاندفاع المعمم $\vec{P}$ يعين بالشكل

$$P = \frac{\partial L}{\partial v} = m v + q A = P + q \vec{A}$$

$P = m v$: الاندفاع

أما تابع هملتون ، فيكون :

$$H = \vec{P}.\vec{U} - L = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 + q \varphi = \frac{1}{2m} (\vec{P} - q\vec{A})^2 + q\varphi$$

مكتبة A to Z