كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الثالثة**

المادة : فيزياء حاسوبية

المحاضرة : الخامسة/نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Zمكتبة

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الفيزياء
مقرر: الفيزياء الحاسوبية

الطرق العددية لحل المعادلات التفاضلية باستخدام الماتلاب (طريقة أولر)

تصاغ العديد من المسائل الفيزيائية على شكل معادلات تفاضلية من الشكل $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ والتي بدورها تحل باستخدام الطرق العددية المعروفة جيداً في التحليل العددي.

وتعرف المعادلة التفاضلية على أنها علاقة ما بين المتحول x والدالة y ومشتقاتها المتتالية $\acute{y},\acute{\acute{y}},\ldots..y^{n-1},y^{n}$ والمعبر عنها بالشكل الآتي:

$$y^{n} = f(x,\acute{y},\acute{\acute{y}},\ldots..y^{n-1},y^{n})$$

ويتعلق الحل العام لهذه المعادلة التفاضلية بـ n من الوسطاء أو الثوابت الاختيارية ويجب أن يحقق الحل العام $y(x)$ الشروط البدائية مثل

$$y(x_0) = y_0 \ ,\acute{y}(x_0) = \acute{y}_0 \ ,\ldots\ldots y^{n-1}(x_0) = {y_0}^{n-1}$$

من أجل $x = x_0$

الطرق العددية لحل المعادلات التفاضلية باستخدام الماتلاب (طريقة أولر)

أما المعادلات التفاضلية من مرتبة أعلى والتي تعبر عن مسائل فيزيائية معينة فيمكننا تبسيطها إلى مرتبة أقل باستخدام معادلات سابقة

مثال: الهزاز التوافقي والذي يوصف بالمعادلة التفاضلية التالية:

$$m\frac{d^2Z}{dt^2} = f(z) \qquad (1)$$

باستخدام معادلة العزم والتي تعبر عنها بالعلاقة:

$$p(t) = m\frac{dz}{dt} \qquad (2)$$

وبالتالي نعيد صياغة المعادلة الأولى على الشكل

$$\frac{p(t)}{m} = \frac{dz}{dt} \longrightarrow f(z) = \frac{dp(t)}{dt} \qquad (3)$$

يتضح من السابق أن المعادلة (1) يمكن إعادة كتابتها من الشكل $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ أي من المرتبة الأولى والتي يمكن حلها بسهولة باستخدام الطرق العددية المعروفة

إيجاد صيغة أولر من منشور تايلور

يمكننا الحصول على الصيغة العامة لحل المعادلات التفاضلية من منشور تايلور للنقطة (x,y) كما يلي

$$y(x+h) = y(x) + \acute{y}(x)h + \acute{\acute{y}}(x)\frac{h^2}{2} + \cdots y^i(x)\frac{h^i}{i!} \qquad i = 1,2,..n$$

نحذف الحدود اعتباراً من الحد الثاني $\acute{\acute{y}}(x)\frac{h^2}{2}$ ينتج لدينا

$$y(x+h) = y(x) + \acute{y}(x)h = y(x) + h\, f(x,y)$$

نبدأ بالنقطة x_1,y_1

$$y_1 = y(x_0+h) = y(x_0) + \acute{y}(x_0)h = y(x_0) + h\, f(x_0,y_0)$$

$$y_2 = y(x_0+2h) = y(x_1) + h\, f(x_1,y_1)$$

والصيغة العامة

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i,y_i)h \quad for\ i = 1,2, \ldots .n$$

يوجد خطأ ضمن طريقة أولر لأننا أهملنا الحدود بعد الحد الأول وتكون رتبة الخطأ من القيمة $(\Delta x)^2$

سنقوم الآن بتطبيق طريقة أولر على الهزاز التوافقي

إيجاد صيغة أولر من منشور تايلور

تعطى المعادلة العامة للهزاز التوافقي المتخامد بالعلاقة

$$m\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}+b\frac{\partial x}{\partial t}+k\,x=0 \qquad (*)$$

$$a=\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$$

$$v=\frac{\partial x}{\partial t}$$

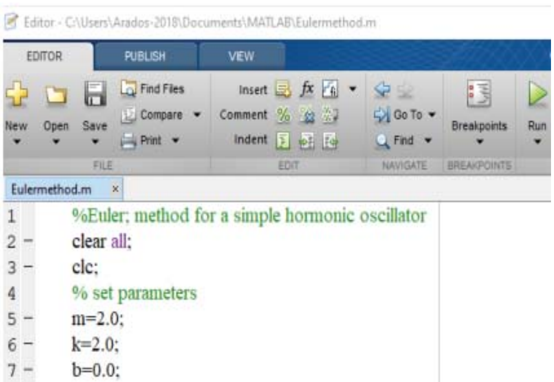
k: ثابت النابضية

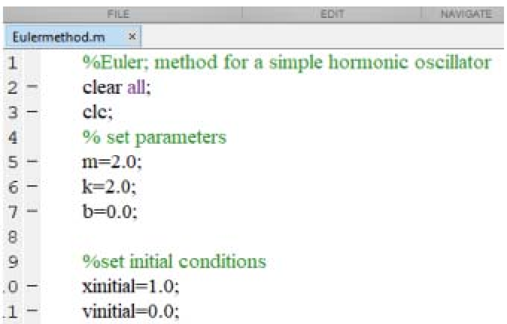
b: التخامد

a: التسارع

v: السرعة

الطرق العددية لحل المعادلات التفاضلية باستخدام الماتلاب (طريقة أولر)





نبدأ على الماتلاب :

1. نفتح New serit
2. نكتب %Euler; method for a simple bormonic oscillator
3. ندخل ثوابت المعادلات المعبرة عن المتغير

Clear all;

$m=2.0;$

$k=2.0;$

$b=0.0;$

4. ندخل الشروط الابتدائية للموضع وللسرعة

$xinitial=1.0;$

$vinitial=0.0;$

الطرق العددية لحل المعادلات التفاضلية باستخدام الماتلاب (طريقة أولر)

5. سنقوم بإنشاء تكرار لخطوات حركة المهتز وعند كل خطوة سنحدد الموضع والسرعة التي لدينا ونقوم بعدها بحساب الموضع الجديد والسرعة الجديدة بناءً على الموضع السابق بالتالي سنكتب

$$x_{new} = x_{old} + v_{old} * h$$

$$v_{new} = v_{old} + a * h$$

h: ثابت متعلق بالزمن

a: التسارع وهو مشتق السرعة

المكان الجديد يعتمد على المكان القديم بإضافة للسرعة مضروب بثابت h

وذلك وفق قانون

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h$$

ونعلم من منشور تايلور أن

$$f(x_i, y_i) = \acute{y}_i(x_i)$$

لأن السرعة تمثل تغير الموضع مع الزمن، فإن التغير في الموضع خلال فترة زمنية h يساوي حاصل ضرب السرعة في هذه الفترة.

الطرق العددية لحل المعادلات التفاضلية باستخدام الماتلاب (طريقة أولر)

6. يجب أن نضع حلقة لأجل التكرارات لتصبح الخطوة 5 وفق الآتي وبالتالي فإن x_{new} تصبح $x(n)$, و v_{new} تصبح $v(n)$ وأيضاً يجب ان نعرف التسارع a والذي يتغير عند كل موضع جديد وذلك من المعادلة *

$$a = -{}^{kx(n)}/_{m} - {}^{b\,v(n)}/_{m}$$

$$for \qquad n = 1{:}100$$

$$a = -{}^{kx(n)}/_{m} - {}^{b\,v(n)}/_{m}$$

$$x(n+1) = x(n) + v(n) * h$$

$$v(n+1) = v(n) + a * h$$

لذلك يجب أن نعرف $x(n)$ $v(n)$ لذلك نعود لوضعها الطبيعي قبل الـ for لتصبح

الطرق العددية لحل المعادلات التفاضلية باستخدام الماتلاب (طريقة أولر)

$\%\ set\ parameters\ and\ initial\ convition$

$$m = 2{,}0;$$
$$k = 2{,}0;$$
$$b = 0{,}0;$$
$$X_{initial} = 1{,}0;$$
$$v_{initial} = 0{,}0;$$

$\% \ldots\ldots\ldots..calculat\ the\ motion \ldots.\%$

$$x(1) = X_{initial};$$
$$v(1) = X_{initial};$$
$$h = 0.1;$$
$$t(1) = 0.0;$$
$$for \quad n = 1{:}10000$$
$$a = -k * {}^{x(n)}/_{m} - b * {}^{v(n)}/_{m}$$
$$x(n+1) = x(n) + v(n) * h;$$
$$v(n+1) = v(n) + a * h;$$
$$t(n+1) = n * h;$$
$$end$$

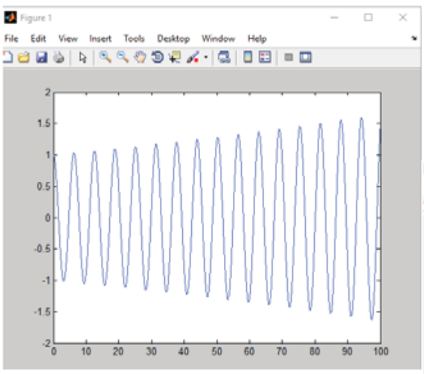
```
%..........calculat the motion....%
x(1)=xinitial;
v(1)=vinitial;
%time initial conditions
h=0.01;
t(1)=0.0;

for    n=1:10000
    a= -k*x(n)/m-b*v(n)/m;
    x(n+1)=x(n)+v(n)*h;
    v(n+1)=v(n)+a*h;
    t(n+1)=n*h;
end
```

الطرق العددية لحل المعادلات التفاضلية باستخدام الماتلاب (طريقة أولر)

7. نرسم تغير المسافة مع الزمن

$$plot(t,x)$$

```
for    n=1:10000
    a= -k*x(n)/m-b*v(n)/m;
    x(n+1)=x(n)+v(n)*h;
    v(n+1)=v(n)+a*h;
    t(n+1)=n*h;
end
plot(t,x)
```

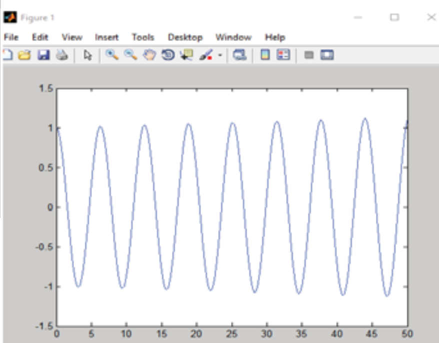


نلاحظ ظهور التابع الجيبي

8. على الرغم من أننا بدأنا مع تخامد صفري إلا أن مطال الاهتزازات كما هو موضح سيبدأ بالتزايد وهذا ناتج عن خطأ حساب أولر كما أشرنا سابقاً وليس خطأ في التطبيق

سنطبق خطأ تراكمي عند كل مرة نحسب فيها التكرار وهو غير حقيقي

يمكن تصغير هذا الخطأ اذا قمنا بتغير h لتصبح 0.005 حيث لا تزال ترسم على نفس الفترة الزمنية من $10000 \rightarrow 0$ لنجد صورة أكثر وضوح لكن يوجد خطأ لكن أقل



الطرق العددية لحل المعادلات التفاضلية باستخدام الماتلاب (طريقة أولر)

9. عند إضافة تخامد على المعادلة

نعيد المحاكاة من أجل $b = 0,4$

```
clear all;
clc;
% set parameters
m=2.0;
k=2.0;
b=0.4;
%set initial conditions
xinitial=1.0;
vinitial=0.0;

%..........calculat the motion....%
x(1)=xinitial;
v(1)=vinitial;
%time initial conditions
h=0.01;
t(1)=0.0;

for   n=1:10000
    a= -k*x(n)/m-b*v(n)/m;
    x(n+1)=x(n)+v(n)*h;
    v(n+1)=v(n)+a*h;
    t(n+1)=n*h;
end
 plot(t,x)
```