كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الثانية**

المادة : كهرباء ومغناطيسية٢

المحاضرة : الخامسة/نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

2025 2024

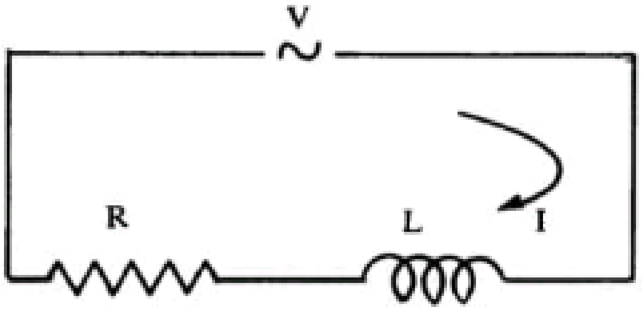
Facebook Group : A to Zمكتبة

(٨ـ٥) التوصيل على التوالي في دائرة مترددة

Conduction in Series in A.C. Circuit

(٨ـ٥ـ١) مقاومة وملف متصلان على التوالي   Resistance and inductance in series

يمثل الشكل (١١ـ٨) قوة دافعة مترددة V يتصل بها على التوالي ملف حثه الذاتي L ومقاومة أومية R (هذه المقاومة قد تكون المقاومة الأومية للملف أو تكون مقاومة مستقلة إذا كان الملف مقاومته مهملة).



شكل (١١ـ٨): دائرة تيار متردد تحتوي على ملف L ومقاومة R على التوالي.

وهناك ثلاث طرق لدراسة هذه الدائرة والدوائر المماثلة التي ستأتي فيما بعد وهي:

أولا: طريقة كتابة المعادلة التفاضلية للدائرة وإيجاد حلها.

ثانيا: طريقة رسم مخطط ضابط الطور (مخطط المتجهات).

ثالثا: طريقة الحساب باستخدام الأعداد المركبة، وسوف يخصص البند (٨ـ٨) لهذه الدراسة.

أولا : طريقة كتابة المعادلة التفاضلية للدائرة

تكتب معادلة الدائرة بالصورة التالية :

$$V = L\frac{dI}{dt} + IR \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (٨\text{-}٣٢)$$

فإذا فرض أن جهد المصدر V تمثله المعادلة (٨ـ١) فإن التيار المار في هذه الدائرة سوف يكون متخلفا عن الجهد بزاوية مقدارها α حيث :

$$I = I_m \sin(\omega t - \alpha) \quad \cdots\cdots\cdots \quad (٨\text{-}٣٣)$$

تسمى α بزاوية الطور وتتراوح قيمتها بين الصفر و$\frac{\pi}{2}$ ، كما هو معروف من دراسة البندين (٨ـ٢) و(٨ـ٤) فإن قيمتها تساوي الصفر في حالة المقاومة فقط و$\frac{\pi}{2}$ في حالة الملف فقط .

بالتعويض عن قيمتي V و I من المعادلتين (٨ـ١) و(٨ـ٣٣) في المعادلة (٨ـ٣٢) يمكن الحصول على :

$$V_m \sin \omega t = I_m R \sin(\omega t - \alpha) + L\, I_m\, \omega \cos(\omega t - \alpha)$$

$$V_m \sin \omega t = I_m R \{\sin \omega t \cos \alpha - \cos \omega t \,.\, \sin \alpha\} + L I_m\, \omega \{\cos \omega t \cos \alpha + \sin \omega t \sin \alpha\}$$

أو:

$$\sin \omega t \{I_m R \cos \alpha + L\, I_m\, \omega \sin \alpha - V_m\} + \cos \omega t \{L\, I_m\, \omega \cos \alpha - I_m R \sin \alpha\} = 0$$

وهذه المعادلة صحيحة لجميع قيم (ωt).

فعندما تكون $\omega t = 0$ يكون

$$\cos \omega t = 1 \,,\, \sin \omega t = 0$$

عندما تكون $\omega t = \frac{\pi}{2}$ يكون

$$\cos \omega t = 0 \,,\, \sin \omega t = 1$$

وبتطبيق هذين الشرطين يمكن الحصول على :

$$L\, \omega \cos \alpha = R \sin \alpha \quad \cdots\cdots \quad (٨\text{-}٣٤)$$

$$V_m = I_m R\cos\alpha + L\, I_m\, \omega \sin\alpha \qquad .. \quad (٨\text{ـ}٣٥)$$

فمن المعادلة (٨ـ٣٤) يمكن الحصول على زاوية الطور أي أن:

$$\tan\alpha = \frac{\omega L}{R} \qquad \therefore \alpha = \tan^{-1}\frac{\omega L}{R} \quad ... \quad (٨\text{ـ}٣٦)$$

ويمكن الحصول من المعادلة (٨ـ٣٦) على:

$$\sin\alpha = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \quad \& \quad \cos\alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

وبالتعويض في المعادلة (٨ـ٣٥) يمكن الحصول على:

$$V_m = I_m \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \quad ...... \quad (٨\text{ـ}٣٧)$$

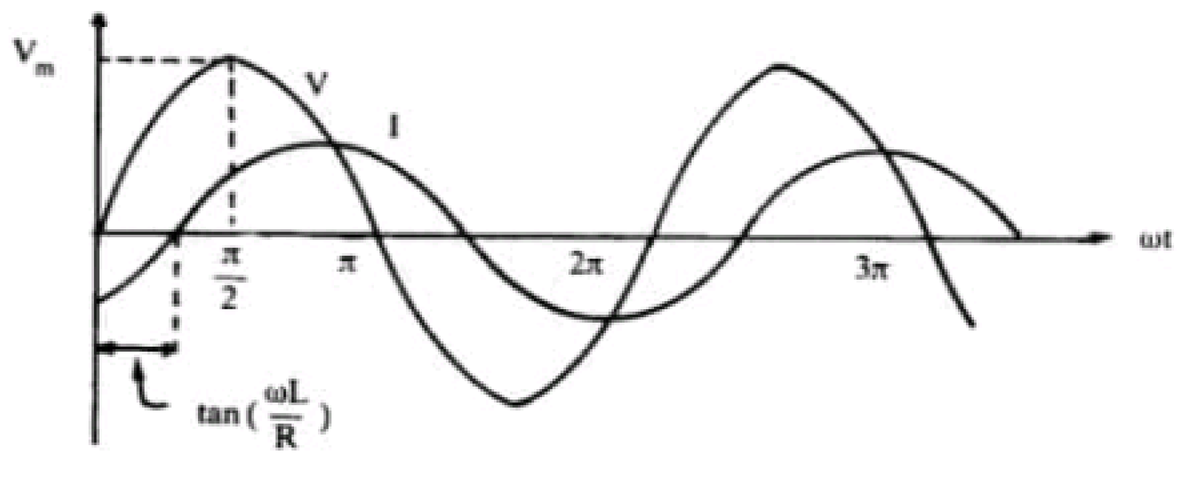
$$V_m = I_m Z$$

حيث:

$$Z = (R^2 + \omega^2 L^2)^{1/2} \quad .... \quad (٨\text{ـ}٣٨)$$

حيث يعرف المقدار Z بالممانعة الحثية (inductive impedance) وهي تقاس بالأوم أيضا، وتمثل نوعا من أنواع المقاومة في الدائرة.

ويبين الشكل (٨ـ١٢) العلاقة بين الجهد V والتيار I وزاوية الطور α .



شكل (٨ـ١٢): العلاقة بين V ، ωt و I ، ωt حسب المعادلتين (٨ـ١) و(٨ـ٣٣) ويوضح الشكل قيمة α بين V و I.

ثانيا: طريقة رسم مخطط ضابط الطور

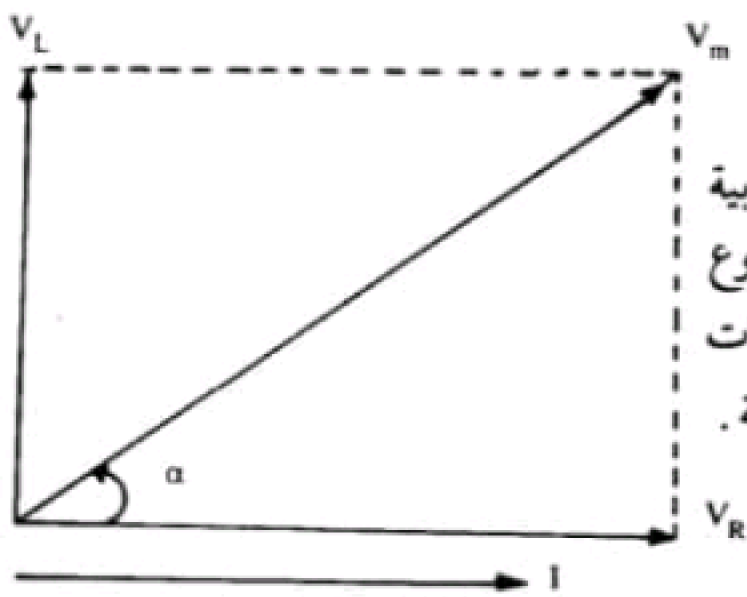
يمكن استخدام مخطط ضابط الطور لحساب الممانعة الحثية Z وزاوية الطور α كما يلي:

لكي يمر التيار الكهربي في الدائرة الموضحة بالشكل (٨ـ١١) يجب أن يكون للقوة الدافعة الكهربية V_m مركبتان هما:

ا ـ جهد المقاومة V_R ومقداره I_mR وهو لازم لتمرير التيار في المقاومة R وكما هو معروف من دراسة البند (٨ـ٢) أن هذا الجهد متفق في الطور مع التيار.

ب ـ جهد الملف الحثي V_L ومقداره $I_m\omega L$ وهو لازم لتمرير التيار في الملف ذي الحث الذاتي L وهذا الجهد متقدم على التيار بزاوية مقدارها π/2، البند (٨ـ٤).

وبذلك يمكن رسم مخطط ضابط الطور كما في شكل (٨ـ١٣) حيث أخذ التيار I_m كخط إسناد لأنه مشترك بين R و L.



شكل (٨ـ١٣): مخطط ضابط الطور للدائرة (٨ـ١١) يوضح اتجاه V_R و V_L والمحصلة V_m وعلاقتها بـ I_m وزاوية الطور α.

وتكون بذلك القوة الدافعة الكهربية V_m اللازمة لتمرير التيار I_m هي مجموع الجهدين V_R و V_L نظرا لأن الكميات الداخلة في الحساب كلها كميات متجهة.

$$\therefore \vec{V}_m = \vec{V}_R + \vec{V}_L$$

أو

$$V_m = (V_R^2 + V_L^2)^{1/2}$$

$$V_m = [I_m^2 R^2 + I_m^2 (\omega L)^2]^{1/2}$$

$$V_m = I_m (R^2 + \omega^2 L^2)^{1/2} = I_m Z$$

$$\therefore Z = (R^2 + \omega^2 L^2)^{1/2}$$

وهي المعادلة (٨ـ٣٨) نفسها. يمكن الحصول على زاوية الطور α من الشكل (٨ـ١٣)، وواضح أنها موجبة وتتراوح قيمتها بين الصفر $(\omega L = 0)$ و $\frac{\pi}{2} (R = 0)$، حيث:

$$\tan\alpha = \frac{V_L}{V_R} = \frac{I_m\omega L}{I_m R} = \frac{\omega L}{R}$$

$$\therefore \alpha = \tan^{-1}\frac{\omega L}{R}$$

وهي المعادلة (٨ـ٣٦) نفسها.

وبهذا يتضح صحة وسهولة فكرة مخطط ضابط الطور في دوائر التيار المتردد.

لإيجاد متوسط القدرة خلال دورة كاملة في هذه الدائرة نتبع ما يلي:

$$P = IV = I_m \sin(\omega t - \alpha)\, V_m \sin\omega t$$

$$P = I_m V_m \sin(\omega t - \alpha) \sin\omega t$$

$$p = \frac{1}{2} I_m V_m \{\cos\alpha - \cos(2\omega t - \alpha)\}$$

$$\therefore\ P = I_{rms} V_{rms} \cos\alpha - I_{rms} V_{rms} \cos(2\omega t - \alpha). \quad (٨ـ٣٩)$$

أي أن قيمة القدرة اللحظية تتكون من حدين أحدهما $I_{rms} V_{rms} \cos\alpha$ وهو ثابت المقدار ويمثل القدرة الفعّالة في الدائرة، والحد الثاني $I_{rms} V_{rms} \cos(2\omega t - \alpha)$ وهو كمية مترددة فقيمتها المتوسطة خلال دورة كاملة تساوي صفرا. وبذلك يكون متوسط قيمة القدرة التي تمتص في الدائرة، وهي عبارة عن القدرة الفعالة في الدائرة، هي:

$$P_{av} = I_{rms} V_{rms} \cos\alpha \quad \ldots\ldots \quad (٨ـ٤٠)$$

وهذا القانون عام لجميع دوائر التيار المتردد، ويسمى المقدار $\cos\alpha$ **بمعامل القدرة** (power factor) إذ أنه يمثل المعامل الذي تتوقف عليه قيمة القدرة التي تمتص في الدائرة. فإذا كانت الدائرة تحتوي على مقاومة فقط فإن $\alpha = 0$ وتكون $\cos\alpha = 1$ ومنه $P = I_{rms} V_{rms}$ وهي المعادلة (٨ـ١٦)، وإذا اشتملت الدائرة على مقاومة وحث ذاتي فإن قيمة α تقع بين الصفر، $\pi/2$، كما أن معامل القدرة يتراوح بين الوحدة والصفر، وكلما ازدادت قيمة الحث الذاتي بالنسبة للمقاومة قلت قيمة معامل القدرة حتى يصبح صفرا: وعندها تكون $(\alpha = \frac{\pi}{2})$ وذلك عندما تحتوي الدائرة حثا ذاتيا فقط.

مــثــال (٨ـ٤)

يتصل جهد متردد قيمته العظمى 100 V وتردده 25 Hz على التوالي بمقاومة قيمتها 1.5 Ω وملف حثه الذاتي 0.01 H.

احسب تيار الدائرة وزاوية فرق الطور وفرق الجهد بين طرفي كل من المقاومة والملف.

الحــــل

$$\omega = 2\pi f = 2 \times \pi \times 25 = 157 \text{ rad/s}$$

$$X_L = \omega L = 157 \times 0.01 = 1.57\ \Omega$$

$$Z = \{ (1.5)^2 + (1.57)^2 \}^{1/2} = (4.71)^{1/2} = 2.17\Omega$$

$$I_m = \frac{100}{2.17} = 46\text{ A}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{X_L}{R} = \tan^{-1}\frac{1.57}{1.5} = 44^\circ\, 19'$$

$$V_R = I_m R = 46 \times 1.5 = 69\text{ V}$$

$$V_L = I_m\, \omega L = 46 \times 1.57 = 72\text{ V}$$

واضح أن الجمع الجبري للمقدارين V_R و V_L يساوي 141 فولت وهي أكبر من القيمة الأصلية والتي تساوي 100 فولت ولهذا فلابد وأن يكون:

$$V_m^2 = V_L^2 + V_R^2$$

مــثــال (٨ـ٥)

تتألف دائرة من عنصرين أساسيين متصلين على التوالي وكان الجهد بين طرفيها هو $V = 150 \sin (500t + 10)$ V والتيار المار هو $I = 13.42 \sin (500t - 53.4)$A تعرف على هذين العنصرين.

الحــــل

واضح أن التيار يتأخر عن الجهد بزاوية قدرها $53.4 + 10 = 63.4^\circ$

وهذا يعني أن الدائرة يجب أن تحتوي على مقاومة R وملف L. ولمعرفة كل منهما نتبع ما يلي:

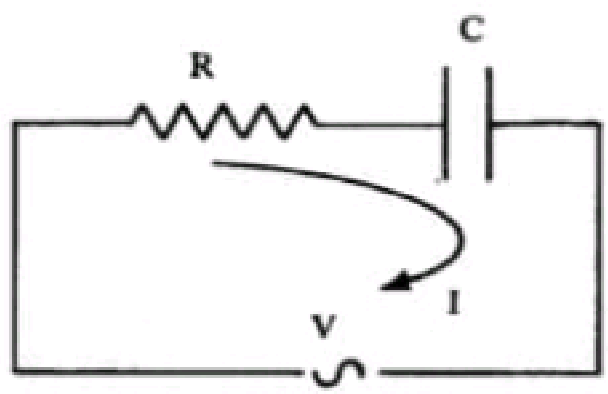
$$\tan\alpha = \tan 63.4 = 2 = \omega L/R$$
$$V_m/I_m = \{(R^2 + (\omega L)^2\}^{1/2}$$
$$150/13.42 = \{R^2 + (2R)^2\}^{1/2} = \sqrt{5}R$$
$$\therefore R = 5\Omega \ \ \& \ \ L = \frac{2R}{\omega} = \frac{2\times 5}{500} = 0.02\,H$$

(٨ـ٥ـ٢) مقاومة ومكثف متصلان على التوالي

Resistance and capacitance in series

يمثل الشكل (٨ـ١٤) دائرة مترددة تحتوي على مصدر متردد V متصل بمقاومة R ومكثف سعته C على التوالي. فإذا مثل جهد المصدر بالمعادلة (٨ـ١) فإن التيار يسبق الجهد، في هذه الحالة، بزاوية طور قدرها α أي أن:

$$I = I_m \sin(\omega t + \alpha) \quad .. \quad (٨ـ٤١)$$



شكل (٨ـ١٤): دائرة تيار متردد تحتوي على مكثف ومقاومة متصلين على التوالي.

أولا: كتابة المعادلة التفاضلية للدائرة

يمكن كتابة معادلة توزيع الجهد للدائرة بالصوة التالية:

$$V = IR + \frac{q}{C}$$

حيث q شحنة المكثف و C سعته و R قيمة المقاومة و I و V القيم اللحظية لكل من التيار وجهد المصدر ويمكن كتابة المعادلة (٨ـ٤١) على الصورة

$$I = \frac{dq}{dt} = I_m \sin(\omega t + \alpha)$$
$$q = I_m \int \sin(\omega t + \alpha)\, dt$$
$$q = -\frac{I_m}{\omega}\cos(\omega t + \alpha) + C$$

وقيمة الثابت C في هذه الحالة تساوي الصفر لأن التيار متردد منتظم أي أن:

$$q = -\frac{I_m}{\omega}\cos(\omega t + \alpha) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٨\text{-}٤٣)$$

وبالتعويض في المعادلة (٨-٤٢) عن I و V و q نحصل على:

$$V_m \sin \omega t = I_m R \sin(\omega t + \alpha) - \frac{I_m}{\omega C}\cos(\omega t + \alpha)$$

$$\therefore V_m \sin \omega t = I_m R \{\sin \omega t \cos \alpha + \cos \omega t \sin \alpha\}$$

$$- \frac{I_m}{\omega C}\{\cos \omega t \cos \alpha - \sin \omega t \sin \alpha\}$$

$$\therefore \cos \omega t \{I_m R \sin \alpha - \frac{I_m}{\omega C}\cos \alpha\}$$

$$+ \sin \omega t \{I_m R \cos \alpha + \frac{I_m}{\omega C}\sin \alpha - V_m\} = 0$$

وهذه المعادلة صحيحة لجميع قيم (ωt).

فعندما تكون $\omega t = 0$ يكون $\cos \omega t = 1 , \sin \omega t = 0$

وعندما يكون $\omega t = \frac{\pi}{2}$ يكون $\cos \omega t = 0 , \sin \omega t = 1$

وبتطبيق هذين الشرطين يمكن الحصول على:

$$R \sin \alpha = \frac{1}{\omega C}\cos \alpha \quad \ldots\ldots \quad (٨\text{-}١٤٤)$$

$$V_m = I_m R \cos \alpha + \frac{I_m}{\omega C}\sin \alpha \quad \ldots \quad (٨\text{-}٤٤ب)$$

يمكن الحصول من المعادلة (٨-١٤٤) على زاوية الطور حيث:

$$\tan \alpha = \frac{1}{\omega C R} = \frac{X_c}{R} \quad \therefore \alpha = \tan^{-1}\frac{1}{\omega C R} \cdot \quad (٨\text{-}٤٥)$$

يمكن الحصول من المعادلة (٨-٤٥) على:

$$\sin\alpha = \frac{X_c}{\left\{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2\right\}^{1/2}} \quad , \quad \cos\alpha = \frac{R}{\left\{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2\right\}^{1/2}}$$

وبالتعويض في المعادلة (٤٤ب ـ ٨) نحصل على:

$$V_m = I_m \left\{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2\right\}^{1/2} = I_m Z$$

حيث:

$$Z = \left\{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2\right\}^{1/2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٨\text{-}٤٦)$$

حيث Z هي الممانعة السعوية (capacitive impedance) وتقاس بالأوم.

ثانيا: رسم مخطط ضابط الطور

ويمكن الحصول على معادلتي الممانعة السعوية (٨ـ٤٧) وزاوية الطور (٨ـ٤٦) بطريقة رسم مخطط ضابط الطور، شكل (٨ـ١٥)، كالتالي:

يلاحظ أن للجهد V_m مركبتين هما:

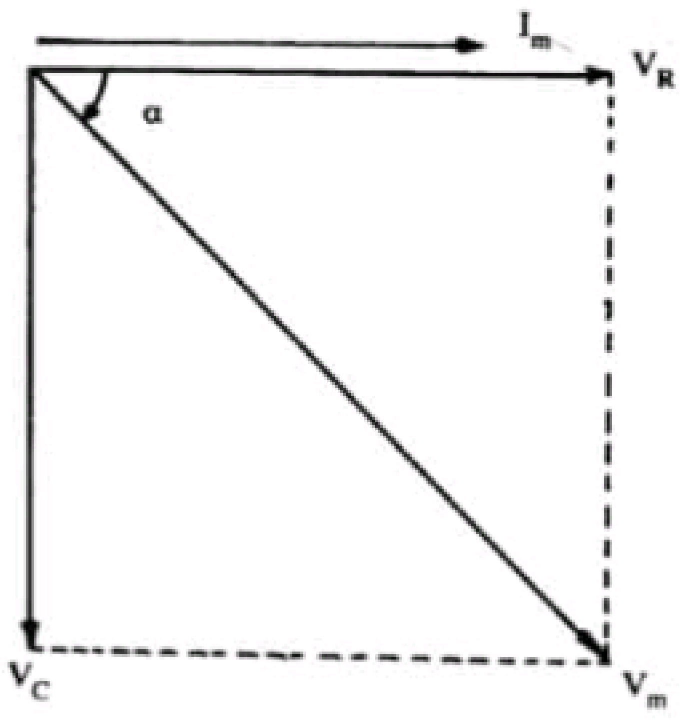
ا ـ المركبة V_R وهي التي تعمل على تمرير التيار I_m في المقاومة R وقيمة هذه المركبة I_mR وهي متفقة في الطور مع التيار.

ب ـ المركبة V_C وهي التي تعمل على تمرير التيار في المكثف C وقيمة هذه المركبة

$$V_C = I_m X_C = I_m/\omega C$$

وهي مختلفة في الطور مع التيار بزاوية مقدارها $\pi/2$.

بجمع هاتين المركبتين جمعا اتجاهيا يمكن الحصول على قيمة الجهد أي أن:



شكل (٨ـ١٥): رسم مخطط ضابط الطور بين V_R و V_C والمحصلة V_m وعلاقتها بـ I_m وزاوية الطور α التي تتراوح قيمتها بين $-\pi/2$ و 0

$$V_m = (V_R^2 + V_C^2)^{1/2}$$
$$= \left\{ I_m^2 R^2 + I_m^2 \left(\frac{1}{\omega C} \right)^2 \right\}^{1/2}$$
$$= I_m \left\{ R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} \right)^2 \right\}^{1/2}$$
$$\therefore Z = \left\{ R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} \right)^2 \right\}^{1/2}$$

وهي المعادلة (٨ـ٤٧) نفسها. كما يمكن حساب زاوية الطور من الشكل (٨ـ١٥) حيث:

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{V_C}{V_R} = \tan^{-1} \frac{1}{\omega CR}$$

وهي المعادلة (٨ـ٤٦) نفسها.
والقيمة اللحظية للقدرة في الدائرة هي:

$$P = VI$$
$$P = V_m \sin \omega t \, I_m \sin (\omega t + \alpha)$$
$$P = \frac{1}{2} V_m I_m (\cos \alpha - \cos (2\omega t + \alpha))$$
$$P = V_{rms} I_{rms} \cos \alpha - V_{rms} I_{rms} \cos (2\omega t + \alpha) \quad (٨ـ٤٧)$$

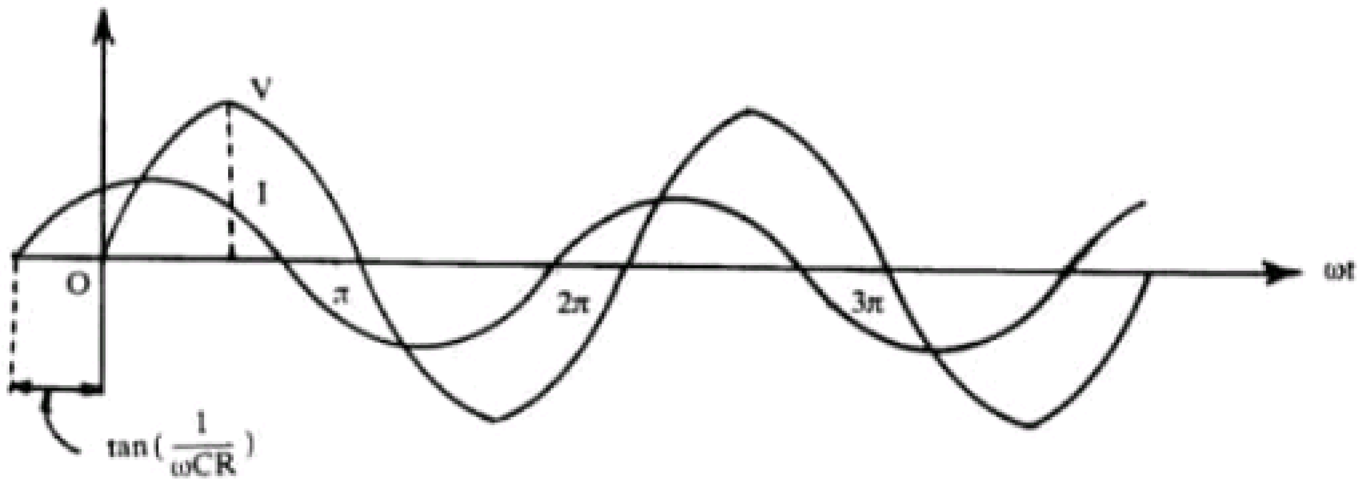
أي أن قيمة القدرة اللحظية تتكون من حدين، الحد الأول منهما ثابت المقدار ويمثل القدرة الفعّالة في الدائرة، والحد الثاني كمية مترددة وقيمتها المتوسطة صفر.

وبذلك يكون متوسط قيمة القدرة التي تمتص في الدائرة وهي عبارة عن القدرة الفعالة في الدائرة هي:

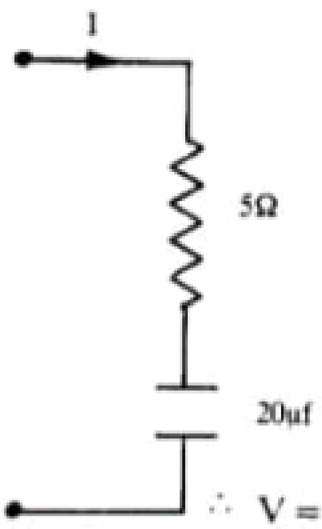
$$P_{av} = V_{rms} I_{rms} \cos \alpha$$

وهي المعادلة (٨ـ٤٠) نفسها.

ويبين شكل (٨ـ١٦) منحنى التيار والجهد في دائرة تحتوي على مقاومة ومكثف



شكل (٨ـ١٦) : العلاقة بين V ، ωt حسب المعادلة (٨ـ١) و I ، ωt حسب المعادلة (٨ـ٤١) ويوضح الشكل قيمة α بين V ، I.



مـثـــال (٨ـ٦)

يمر في الدائرة التالية تيار قيمته $I = 2 \cos 5000t$ A.

احسب الجهد V المسلط عليها .

الحـــل

$$V = V_m \cos(\omega t - \alpha)$$

$$\therefore\ V = \left\{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2\right\}^{1/2} I_m \cos\left(\omega t - \tan^{-1}\frac{1}{\omega CR}\right)$$

$$V = 22.4 \cos(5000\,t - 63.4)\ \text{V}$$

حيث

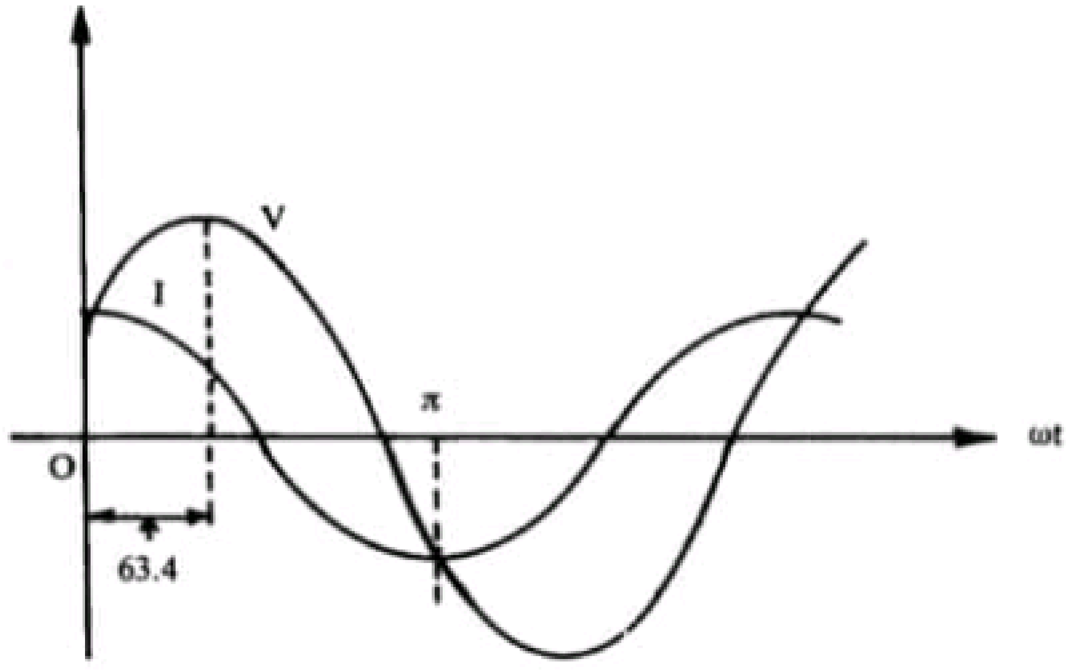
$$R = 5\Omega \quad , \quad \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{5000 \times 20 \times 10^{-6}} = 10\Omega$$

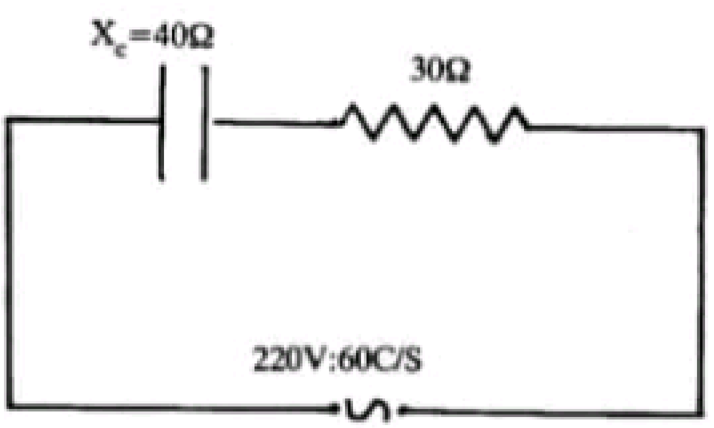
$$\&\ \tan^{-1}\left(\frac{1}{\omega CR}\right) = \tan^{-1}\frac{10}{5} = 63.4^\circ \quad , \quad I_m = 2\,\text{A}$$

$$Z = 11.18\ \Omega$$

ويسبق التيار الجهد بزاوية طور مقدارها 63.4°.

والشكل التالي يوضح منحنى التيار والجهد لهذه الدائرة .





مثـــال (٧ـ٨)

في الدائرة التالية احسب:

ا ـ التيار المار في الدائرة.

ب ـ زاوية الطور بين التيار والجهد.

جـ ـ معامل القدرة.

الحـــل

ا ـ
$$Z = \sqrt{R^2 + X_c^2} = \sqrt{(30)^2 + (40)^2} = 50\Omega$$

$$I_m = V_m/Z = 220/50 = 4.4\ \text{A}$$

ب ـ
$$\tan\alpha = X_c/R = -40/30 = -1.33$$

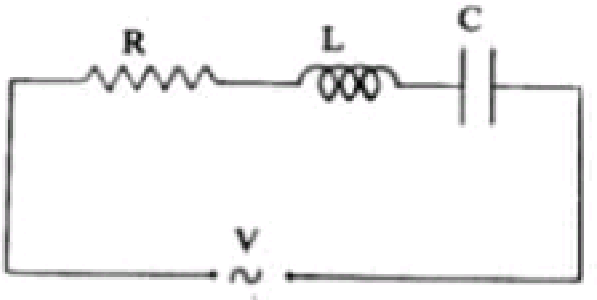
$$\therefore \quad \alpha = -53^\circ$$

والإشارة السالبة تعني أن الجهد يتأخر عن التيار بزاوية قدرها 53°.

جـ ـ
$$\cos\alpha = \cos(-53^\circ) = \cos 53 = 0.60$$

(٨ـ٥ـ٣) مقاومة وملف ومكثف متصلة على التوالي R. L. C. in series

يبين الشكل (٨ـ١٧) قوة دافعة كهربية مترددة قيمتها $V = V_m \sin \omega t$ موصلة في دائرة تحتوي على مقاومة (R)، اهذه المقاومة قد تكون المقاومة الأومية



شكل (٨ـ١١٧): دائرة مترددة تحتوي على مقاومة وملف ومكثف متصلة على التوالي.

للملف أو مجموع المقاومات الموجودة في الدائرة، ورد حثي $(X_L = \omega L)$ ورد سعوي $(X_C = \frac{1}{\omega C})$ موصلة معاً على التوالي، فإذا كانت القيمة العظمى للتيار المار في الدائرة هو I_m أمبير يلزم ثلاث مركبات للجهد لإمرار التيار في الدائرة هي:

ا ـ المركبة $V_R = I_m R$ لتمرير التيار في المقاومة وتكون في اتفاق طوري مع التيار.

ب ـ المركبة $V_L = I_m \omega L$ لتمرير التيار في الملف وتكون متقدمة على التيار بزاوية $\pi/2$.

جـ ـ المركبة $V_C = \frac{I_m}{\omega C}$ لتمرير التيار في المكثف وتكون متخلفة على التيار بزاوية $\pi/2$.

والمجموع الاتجاهي لهذه المركبات الثلاثة تعطى الجهد V_m كما في شكل (٨ـ١١٨).

$$\therefore \quad V_m = \{V_R^2 + (V_L - V_C)^2\}^{1/2}$$

$$V_m = I_m \left\{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right\}^{1/2} \quad \ldots\ldots \quad (٨ـ٤٨)$$

حيث

$$V_m = I_m Z$$

$$Z = \left\{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right\}^{1/2} \quad \ldots\ldots \quad (٨ـ٤٩)$$

وكما هو واضح من الشكل (٨ـ١١٨) أن زاوية الطور تساوي:

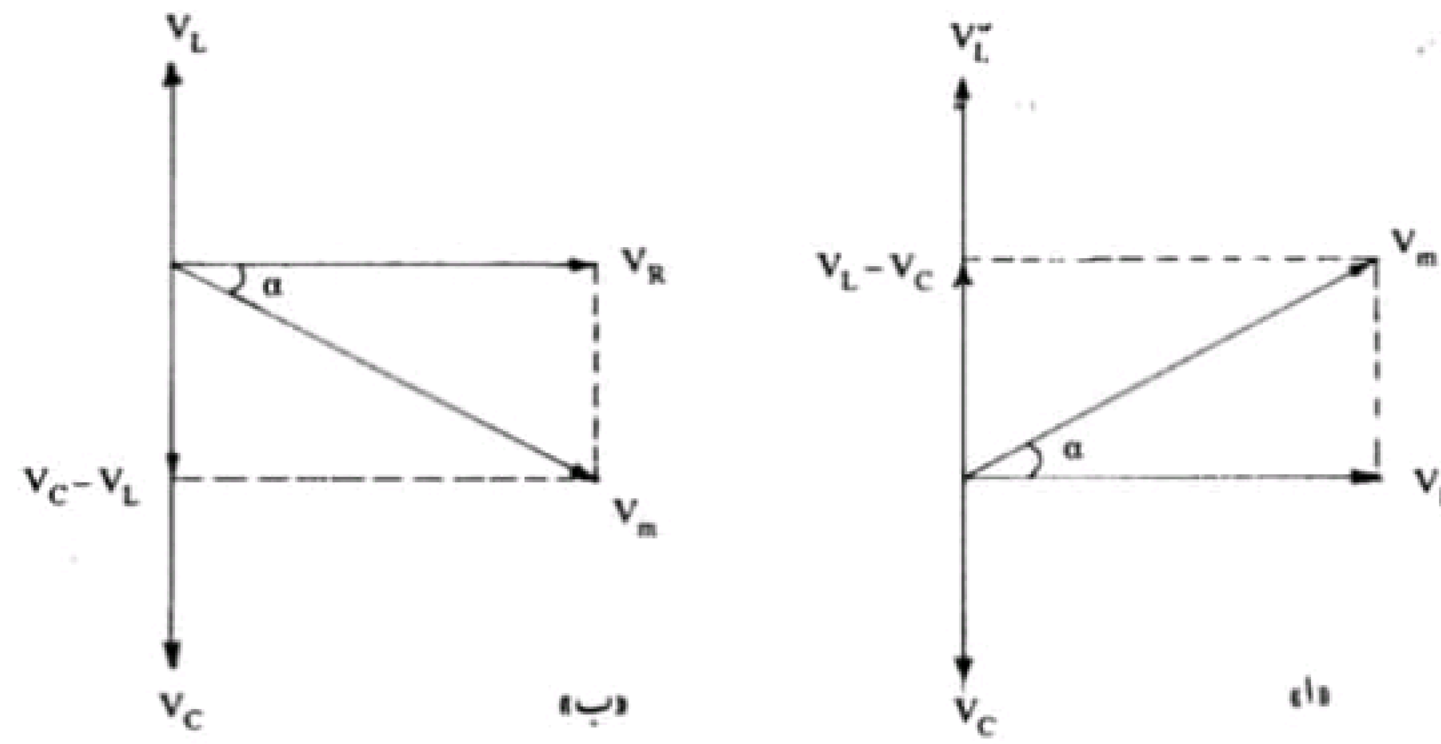
$$\alpha = \tan^{-1} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad \ldots\ldots \quad (٨ـ٥٠)$$

توجد ثلاث حالات مختلفة بالنسبة للنتيجة التي نحصل عليها من كل من المعادلتين (٨ـ٤٨) و(٨ـ٥٠) وهي:

ا - عندما يكون الرد الحثي X_L أكبر من الرد السعوي X_C ($\omega L > \frac{1}{\omega C}$) يكون التيار متأخرا عن الجهد، ويقال للدائرة إنها ذات معاوقة حثية.

ويمكن أن تعد ممانعة مكافئة فقط في الدائرة مقدارها ($X_L - X_C$) مع اختفاء X_C ويتضح ذلك من شكل (١٨أ - ٨).

ب - عندما يكون الرد السعوي X_C أكبر من الرد الحثي X_L أي أن $(1/\omega C) > \omega L$ يكون التيار متقدما على الجهد، ويتضح ذلك من الشكل (١٨ب - ٨)، ويقال في هذه الحالة إن الدائرة ذات معاوقة سعوية ويمكن أن تعتبر وجود ممانعة سعوية مكافئة مقدارها ($X_C - X_L$) مع اختفاء X_L من الدائرة.



شكل (٨-١٨): مخطط المتجهات بين V_R و V_L و V_c عندما
ا - $V_L > V_C$
ب - $V_C > V_L$ وفي كلتا الحالتين يوضح الشكل علاقتها مع المحصلة V_m وزاوية الطور α للدائرة الواردة في شكل (٨-١٧).

جـ - عندما تتساوى كل من X_L ، X_C تكون المقاومة في هذه الحالة أصغر ما يمكن ($X_C - X_L = 0$) ، وتكون قيمتها مساوية لقيمة المقاومة R فقط. وتكون قيمة التيار الذي ينتج في الدائرة أكبر ما يمكن $I = \frac{V}{R}$ كما أن التيار يصبح متفقا في الطور مع الجهد ($\alpha = \tan^{-1} 0 = zero$) ، ويقال للدائرة في هذه الحالة إنها في

حالة رنين (resonance) ، وتكون القدرة الفعّالة في الدائرة أكبر ما يمكن وذلك لأن قيمة التيار أكبر ما يمكن كما أن معامل القدرة cos α يساوي الوحدة، وهذه هي قيمة النهاية العظمى له وتكون قيمة القدرة غير الفعّالة مساوية للصفر.

ويلاحظ أن هبوط الجهد على الملف (I_mX_L) يساوي الهبوط على المكثف (I_mX_c) بينما هبوط الجهد على المقاومة يكون (I_mR) مساويا لجهد المصدر V_m. ونظرا لأن الجهد على طرفي الملف (I_mX_L) يساوي الجهد على المكثف (I_mX_C) ويضاده في الاتجاه، فإن كلا منهما يلاشي الآخر، وقد تكون قيمة كل منهما في هذه الحالة كبيرة جدا بالنسبة لجهد المصدر.

وتستخدم هذه الطريقة في دوائر الراديو للحصول على جهود كبيرة على أطراف الملفات والمكثفات باستخدام مصادر ذات جهود محدودة القيمة.

مما سبق يتضح أن شرط الرنين لابد أن يكون:

$$\omega_r L = \frac{1}{\omega_r C}$$

$$2\pi f_r L = \frac{1}{2\pi f_r C}$$

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (٨-٥١)$$

وتعرف f_r هنا بالتردد الذاتي (self frequency) للدائرة وتستخدم خاصية الرنين في عملية التوليف (tuning process) في أجهزة الاستقبال حيث تتكون دائرة الايريال من ملف ومكثف على التوالي وتتولد في هذه الدائرة قوى دافعة بواسطة الموجات المنتشرة من محطات الإذاعة المختلفة وحينما نغير سعة المكثف C حتى يصبح التردد f_r مساويا لتردد الإذاعة المطلوب سماعها فإن التيار التأثيري المتولد يكون أكبر ما يمكن بالنسبة لهذا التردد دون غيره ونتمكن بذلك من سماع الإذاعة المطلوبة.

ويمكن تحقيق الشرط الوارد في المعادلة (٨ـ٥١) بتغير قيمة التردد للمصدر، أو بتغيير قيمة كل من L أو C أو كليهما معا.

ويمكن أن تحقق العلاقتين (٨ـ٤٩) و(٨ـ٥٠) رياضيا كالتالي:
بتطبيق قانون كيرشوف على الدائرة (٨ـ١٧) فإن القوة الدافعة المترددة في أية لحظة هي:

$$V = IR + L\frac{dI}{dt} + \frac{q}{C} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٨ـ٥٢)$$

حيث $V = V_m \sin(\omega t)$ ، q الشحنة اللحظية للمكثف، $I = I_m \sin(\omega t \pm \alpha)$ حيث α فرق الطور وبالتعويض في العلاقة (٨ـ٥٢) يُحصل على:

$$V_m \sin \omega t = I_m R \sin(\omega t - \alpha) + I_m \omega L \cos(\omega t - \alpha) - \frac{I_m}{\omega C} \cos(\omega t - \alpha)$$

$$V_m \sin \omega t = I_m R \sin(\omega t - \alpha) + I_m\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\cos(\omega t - \alpha)$$

$$V_m \sin wt = I_m R\left\{\sin\omega t \cos\alpha - \cos\omega t \sin\alpha\right\} + I_m\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \times \{\cos \omega t \cos \alpha + \sin \alpha \sin \omega t\}$$

$$\therefore \sin \omega t\left\{I_m R \cos\alpha + I_m\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\sin\alpha - V_m\right\} + \cos\omega t\left\{I_m\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\cos\alpha - I_m R \sin\alpha\right\} = 0$$

وهي صحيحة لكل قيم (ωt) وبذلك:

عندما $\omega t = 0$ فإن $\sin \omega t = 0 , \cos \omega t = 1$

عندما $\omega t = \frac{\pi}{2}$ فإن $\sin \omega t = 1, \cos \omega t = 0$

ومن هذين الشرطين يُحصل على:

$$V_m = I_m R \cos\alpha + I_m\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\sin\alpha \quad \ldots \quad (٨ـ٥٣)$$

$$\& \qquad I_m\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)\cos\alpha = I_m R\sin\alpha \quad \ldots \quad (٨\text{ـ}٥٤)$$

ويمكن الحصول من المعادلة (٨ـ٥٣) على زاوية الطور حيث:

$$\tan\alpha = \frac{\omega L-\frac{1}{\omega C}}{R} \quad \text{or} \quad \alpha = \tan^{-1}\frac{\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)}{R}$$

وهي المعادلة (٨ـ٥٠) نفسها ومنها يمكن الحصول على:

$$\sin\alpha = \frac{\omega L-\frac{1}{\omega C}}{\left\{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2\right\}^{1/2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{R}{\left\{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2\right\}^{1/2}} \quad \ldots\ldots \quad (٨\text{ـ}٥٥)$$

وبالتعويض في المعادلة (٨ـ٥٤) يمكن الحصول على الممانعة الكلية Z حيث:

$$V_m = I_m\left\{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2\right\}^{1/2} \qquad \therefore Z = \left\{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2\right\}^{1/2}$$

وهي المعادلة (٨ـ٤٩) نفسها.

وأما متوسط القدرة فتخضع للعلاقة (٨ـ٤٠) نفسها حيث:

$$P_{av} = I_{rms}V_{rms}\cos\alpha$$

وأخيرا نستطيع القول إنه يمكن استنتاج معادلات جميع الحالات التي سبق دراستها من المعادلات (٨ـ٤٨)، (٨ـ٤٩) و(٨ـ٥٠).

مـثـال (٨ـ٨)

وصلت مقاومة مقدارها 30 Ω وملف حثه الذاتي 0.5 H ومكثف سعته 30μ . F على التوالي بمصدر متردد جهده الفعال 220V وتردده 50 c/s.

احسب الممانعة الكلية للدائرة والتيار المار ومعامل القدرة ومتوسط القدرة المستهلكة.

الحــــل

$$X_L = \omega L = 2\pi fL = 2 \times 3.14 \times 50 \times 0.5 = 157\,\Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{2 \times 3.14 \times 50 \times 30 \times 10^{-6}} = 106\,\Omega$$

وطبقا للمعادلة (٨ـ٤٨) فإن الممانعة الكلية :

$$Z = \left\{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right\}^{1/2} = [30^2+(156-106)^2]^{1/2}=58.3\Omega$$

$$I_{rms}=\frac{V_{rms}}{Z}=\frac{220}{58.3}=3.74\ A$$

مع ملاحظة أن القيمة المعطاة للجهد والقيمة الناتجة للتيار هي القيمة الفعالة .
وحسب المعادلة (٨ـ٥٥) فإن :

$$\cos\alpha = \frac{R}{Z} = \frac{30}{58.3} = 0.514$$

متوسط القدرة الفعالة

$$P_{av} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}\frac{V_m}{\sqrt{2}}\cos\alpha = I_{rms}V_{rms}\cos\alpha$$

$$P_{av}=3.74\times 220\times 0.514=422.9W$$

مــثــال (٨ـ٩)

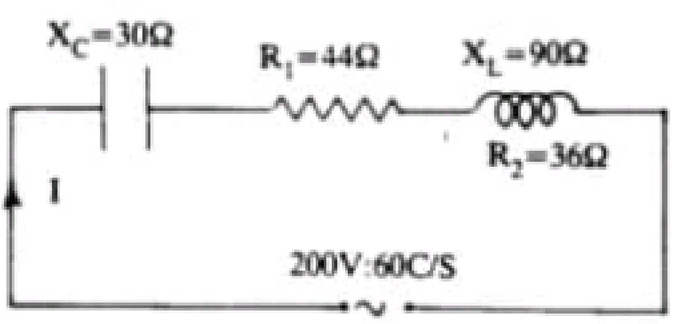
في الدائرة التالية احسب :

ا ـ التيار المار في الدائرة .

ب ـ فرق الجهد بين طرفي كل من المكثف والمقاومة والملف .

جـ ـ معامل القدرة للدائرة .

د ـ القدرة الممتصة بواسطة الدائرة .



الحـــل

أ-
$$Z = \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (X_L - X_c)^2}$$
$$Z = \sqrt{(44 + 36)^2 + (90 - 30)^2} = 100\ \Omega$$
$$\therefore\quad I_m = V_m/Z = 200/100 = 2\ A$$

ب-
$$V_C = I_m X_c = 2 \times 30 = 60\ V$$
$$V_{R_1} = I_m R_1 = 2 \times 44 = 88\ V$$
$$V_L = I_m \sqrt{R_2^2 + X_L^2} = 2 \times 97 = 194\ V$$

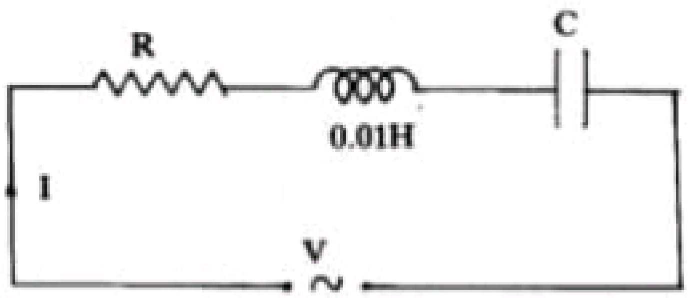
جـ-
$$\cos\alpha = R/Z = 80/100 = 0.8$$

د-
$$P_{av} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}\frac{I_m}{\sqrt{2}}\cos\alpha = \frac{200\times2\times0.8}{2} = 160W$$

مـــثـــال (١٠-٨)

احسب R و C في الدائرة التالية إذا كان:

$$V = 353.5\cos(3000t - 10)\ V$$
$$I = 12.5\cos(3000t - 55)\ A$$



الحـــل

التيار يتأخر عن الجهد بزاوية قدرها:

$$55 - 10 = 45°$$

$$\therefore \tan 45 = 1 = (\omega L - 1/\omega C)/R \quad \therefore (\omega L - 1/\omega C) = R$$

$$\&\ V_m/I_m = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2} = \sqrt{2R^2} = 353.5/12.5$$

$$\therefore R = 20\ \Omega$$

ومن المعادلة $R = (\omega L - 1/\omega C)$ يمكن معرفة C حيث:

$$C = 3.33 \times 10^{-5}\ F = 33.3\ \mu F$$