كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الثانية**

المادة : ميكانيك تحليلي

المحاضرة : الثالثة /نظري/د.علي أسد

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الفيزياء

مقرر: الميكانيك التحليلي
الفصل الثالث: معادلات هاملتون، أقواس بواصون، معادلة هاملتون - جاكوبي
د. علي أسد

معادلات هاملتون، أقواس باصون، معادلة هاملتون – جاكوبي

- يعطى تابع هاملتون بالعلاقة:

$$H(p_j, q_j, t) = \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - L(q_j, \dot{q}_j, t)$$

$$= \sum p_j \dot{q}_j - L(q_j, \dot{q}_j, t) \qquad (1)$$

حيث: $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$ يسمى الاندفاع المعمم

- في تابع هاملتون نبدل كل السرع المعممة $\dot{q}_j$ بدلالة الاندفاعات المعممة p_j والاحداثيات المعممة q_j.

<u>معادلات هاملتون (المعادلات القانونية):</u>

نفاضل H فنجد:

$$dH = \sum p_j\, d\dot{q}_j + \sum \dot{q}_j\, dp_j - \sum \frac{\partial L}{\partial q_j} dq_j - \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j - \frac{\partial L}{\partial t}$$

بما أن $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$ بالتالي ينعدم الحدين الأول والرابع فنحصل على:

$$dH = \sum \dot{q}_j\, dp_j - \sum \frac{\partial L}{\partial q_j} dq_j - \frac{\partial L}{\partial t} \qquad (2)$$

من جهه ثانية نحصل بمفاضلة H باعتبارها تابعاً لما يسمى المتحولات القانونية (أو الديناميكية) p_j و q_j على العلاقة:

$$dH = \sum \frac{\partial H}{\partial p_j} dp_j + \sum \frac{\partial H}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial H}{\partial t} dt \qquad (3)$$

فإذا بدلنا $\frac{\partial L}{\partial q_j}$ في العلاقة (2) بقيمتها من معادلات لاغرانج:

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \dot{p}_j$$

وقارنا بين (2) و (3) نحصل على معادلات هاملتون (المعادلات القانونية) بالشكل الآتي:

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \qquad -\dot{p}_j = \frac{\partial H}{\partial q_j}, (j = 1,2, \dots, n) \qquad (4)$$

بالإضافة إلى المعادلة المتممة:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t} \qquad (5)$$

<u>توضيح:</u>

إن عدد معادلات لاغرانج هو n معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية بينما عدد معادلات هاملتون هو 2n معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى.

<u>خواص تابع هاملتون:</u>

1. نأخذ معادلات لاغرانج في حالة انعدام القوى غير المشتقة من كمون $(\acute{Q}_j = 0)$ ونضرب الطرفين بـ $\dot{q}_j$ ثم نجمع بـ j فنجد:

$$\sum_{j=1}^{n} \dot{q}_j \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_j}\dot{q}_j \qquad (6)$$

نضيف إلى الطرفين المقدار $\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j$ فنجد:

$$\sum_{j=1}^{n} \dot{q}_j \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_j}\dot{q}_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j \qquad (7)$$

إذا علمنا أن تابع لاغرانج يتبع بصورة عامة $L(\dot{q}_j, q_j, t)$ وبالتالي:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_j}\dot{q}_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial t}$$

وبالتالي:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_j}\dot{q}_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j = \frac{dL}{dt} - \frac{\partial L}{\partial t}$$

أما الطرف الأيسر من المعادلة (7) فيمثل المشتق الكلي للمقدار $\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j$ وبالتالي:

$$\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j\right] = \frac{dL}{dt} - \frac{\partial L}{\partial t}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - L\right] = \frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad (8)$$

بنعدم الطرف الثاني إذا لم يحوِ تابع لاغرانج الزمن بشكل صريح عندئذٍ نحصل على تكامل جديد للحركة هو التالي:

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - L = const \qquad (9)$$

سنبرهن فيما يلي أن هذا التكامل هو تكامل طاقة:

2. نحسب الحد الأول من العلاقة (9) (تابع الكمون لا يحوي السرع المعممة فهو يتبع فقط للاحداثيات المعممة q_j وبالتالي:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$$

واعتماداً على نظرية أولر في التوابع المتجانسة:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j = 2T \qquad (10)$$

وبالتالي نجد:

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - L = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - L = 2T - T + V = T + V = E \qquad (11)$$

<u>سؤال:</u> اكتب معادلات هاملتون لجسيم طليق (غير خاضع لأي ارتباطات) يتحرك في كمون (جهد) من الشكل $\boldsymbol{V(r,\theta,\varphi)}$.

إن تابع لاغرانج لهذا الجسيم هو:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 sin\,\theta\dot{\varphi}^2\right) - V(r,\theta,\varphi)$$

أما تابع هاملتون له فهو:

$$H = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \dot{r} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \dot{\theta} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \dot{\varphi} - \frac{1}{2} m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 sin^2\,\theta\dot{\varphi}^2\right) + V(r,\theta,\varphi)$$

$$= \frac{1}{2} m(2\dot{r}^2 + 2r^2\dot{\theta}^2 + 2r^2 sin^2\,\theta\dot{\varphi}^2) - \frac{1}{2} m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 sin^2\,\theta\dot{\varphi}^2\right) + V(r,\theta,\varphi)$$

بإخراج 2 عامل مشترك وطرح الحدين الأول والثاني نحصل على:

$$H = \frac{1}{2} m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 sin^2\,\theta\dot{\varphi}^2\right) + V(r,\theta,\varphi) = T + V$$

لا يمكن الاستفادة من H بهذه الصيغة ولابد من تحويلة إلى شكله النظامي بدلالة p_j و q_j ولهذا نستفيد من العلاقات التالية:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} = p_r \implies \dot{r} = \frac{p_r}{m}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} = p_\theta \implies \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 sin^2\,\theta\dot{\varphi} = p_\varphi \implies \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2 sin^2\,\theta}$$

نبدل فنحصل على تابع هاملتون بشكله النظامي التالي:

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 sin^2\,\theta}\right) + V(r,\theta,\varphi)$$

يسهل الآن تشكيل معادلات هاملتون، حيث نجد المجموعة الأولى التالية:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} = \dot{r} &\implies p_r = m\,\dot{r} \\ \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} = \dot{\theta} &\implies p_\theta = mr^2\dot{\theta} \\ \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2 sin^2\,\theta} = \dot{\varphi} &\implies p_\varphi = mr^2 sin^2\,\theta\dot{\varphi} \end{aligned}\right\}$$

أما المجموعة الثانية فهي:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial r} = -\dot{p}_r \implies -\frac{1}{mr^3}\left(p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{sin^2\,\theta}\right) + \frac{\partial V}{\partial r} = -\dot{p}_r \\ \frac{\partial H}{\partial \theta} = -\dot{p}_\theta \implies -\frac{p_\varphi^2 \cos\theta}{mr^2 sin^2\,\theta} + \frac{\partial V}{\partial \theta} = -\dot{p}_\theta \\ \frac{\partial H}{\partial \varphi} = -\dot{p}_\varphi \implies \frac{\partial V}{\partial \varphi} = -\dot{p}_\varphi \end{aligned}\right\}$$

<u>سؤال:</u> اكتب معادلات هاملتون لجسيم طليق (غير خاضع لأي ارتباطات) يتحرك في كمون (جهد) من الشكل $V(x, y, z)$ ثم استنتج منها معادلات نيوتن لهذه الحركة.

يعطى تابع لاغرانج بالصيغة:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z)$$

أما تابع هامتون فهو:

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) + V(x, y, z)$$

وتصبح معادلات هاملتون:

$$\frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m} = \dot{x} \implies p_x = m\dot{x}$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{p_y}{m} = \dot{y} \implies p_y = m\dot{y}$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m} = \dot{z} \implies p_z = m\dot{z}$$

وكذلك:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x} = -\dot{p}_x \implies \dot{p}_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = F_x = m\ddot{x}$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial y} = -\dot{p}_y \implies \dot{p}_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = F_y = m\ddot{y}$$

$$\frac{\partial H}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial z} = -\dot{p}_z \implies \dot{p}_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = F_z = m\ddot{z}$$

<u>سؤال:</u>

اكتب الصيغة الرياضية لمعادلات الرواث موضحاً الفرق بينها وبين معادلات لاغرانج، ثم استنتج منها الصيغة العامة لتابع الرواث.

الحل:

تعطى معادلات الرواث بالشكل الآتي:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial R}{\partial q_j} = 0 \quad , \qquad (j = 1,2, \dots, n-s) \qquad (12)$$

وهي عبارة عن $n - s$ معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية، أي أن عدد المعادلات ينقص s معادلة عن معادلات لاغرانج مما يجعلها أسهل استخداماً. نضرب طرفي المعادلة (12) بـ $\dot{q}_j$ ونجمع بـ j فنجد:

$$\sum_{j=s+1}^{n} \dot{q}_j \frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{j=s+1}^{n} \dot{q}_j \frac{\partial R}{\partial q_j}$$

نضيف إلى طرفي المعادلة المقدار

$$\sum_{j=s+1}^{n} \ddot{q}_j \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j}$$

$$\sum_{j=s+1}^{n} \dot{q}_j \frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} + \sum_{j=s+1}^{n} \ddot{q}_j \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{j=s+1}^{n} \dot{q}_j \frac{\partial R}{\partial q_j} + \sum_{j=s+1}^{n} \ddot{q}_j \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j}$$

ومنه:

$$\frac{d}{dt}\sum_{j=s+1}^{n} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j = \frac{dR}{dt} - \frac{\partial R}{\partial t}$$

وبالتالي:

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{j=s+1}^{n} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - R\right] = -\frac{\partial R}{\partial t}$$

وفي الحالة الخاصة عندما لا يحوي تابع الرواث الزمن بشكل صريح نحصل على تكامل حركة يمكن استخدامه في حل المسائل هو التالي:

$$\sum_{j=s+1}^{n} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - R = const$$

<u>سؤال:</u> يتحرك جسيم كتلته m في مستوي تحت تأثير قوة مركزية F_r مشتقة من كمون $F_r = -\frac{k}{r^n}$. حدد (تابع رواث الموافق – معادلات رواث الموافقة – والمعادلات القانونية) لهذا الجسيم.

تابع رواث:

$$\sum_{j=s+1}^{n} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - R = const$$

حيث:

$$R = L - \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j$$

L : تابع لاغرانج.

R : تابع رواث.

$\dot{q}_j$: السرعة المعممة.

$$L = T - V$$

$$L = H = \frac{1}{2} m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{k}{r^n}$$

نحسب تابع الرواث:

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \implies \dot{r} = \frac{p_r}{m}$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{2} m.2.r^2\dot{\theta} \implies \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}$$

$$R = L - \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j$$

$$R = -p_\theta\dot{\theta} + L = -\frac{p_\theta}{mr^2} p_\theta + L$$

$$= -\frac{p_\theta^2}{mr^2} + \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{m}{2} r^2 \frac{p_\theta^2}{m^2 r^4} + \frac{k}{r^n}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{p_\theta^2}{mr^2} + \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{k}{r^n}$$

للحصول على معادلات رواث نعوض في:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial R}{\partial q_j} = 0$$

$$q_1 = r \ , \ q_2 = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dt}\left(2\frac{m}{2}\dot{r}\right) - \left[\frac{p_\theta^2}{2} \cdot \frac{-2mr}{(m^2r^2)^2} + \frac{(-k.n.r^{n-1})}{r^{2n}}\right] = 0$$

$$\Longrightarrow m\ddot{r} + \frac{p_\theta^2}{m^2r^2} - n.\frac{k}{r^{n+1}} = 0$$

وهي معادلة الحركة لجسيم يتحرك تحت تأثير قوة مركزية.

حساب المعادلات القانونية:

$$\frac{\partial R}{\partial q_j} = \frac{\partial L}{\partial q_j} = -\dot{p}_j$$

$$\frac{\partial R}{\partial C_j} = -\dot{q}_j$$

$$\frac{\partial R}{\partial P_j} = \frac{\partial L}{\partial P_j} = \dot{q}_j$$

وهذا يطبق على الاحداثي r أما بخصوص الاحداثي θ الذي تجاهلناه فيكون

$$\dot{p}_\theta = 0 \quad \Longrightarrow P_\theta = const$$

<u>سؤال:</u> عرف أقواس بواصون واذكر خواصها.

إذا كان التابعين f_1 و f_2 تابعين لمتحولات قانونية q_j و p_j عندها يمكن تعريف أقواس بواصون لهذين التابعين بالشكل:

$$[f_1 , f_2] = \sum_j \frac{\partial f_1}{\partial P_j} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial q_j} - \frac{\partial f_1}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial P_j}$$

خواص أقواس بواصون:

1. لاتبادلية:

$$[f_1 , f_2] \neq [f_2 , f_1]$$

$$[f_1 , f_2] = -[f_2 , f_1]$$

2. تجميعية:

$$[f_1 + f_2 , f_3] = [f_1 , f_3] + [f_2 , f_3]$$

3. توزعية:

$$[f_1 . f_2 , f_3] = f_1 . [f_2 , f_3] + f_2 . [f_1 , f_3]$$

4. تحقق علاقة جاكوبي:

$$[f_1 , [f_2 , f_3]] + [f_3 , [f_1 , f_2]] + [f_2 , [f_3 , f_1]] = 0$$

5.

$$\frac{d}{dt}[f_1 , f_2] = \left[\frac{d}{dt} f_1 , f_2\right] + \left[f_1 , \frac{d}{dt} f_2\right]$$

ملاحظات:

أقواس بواصون في ميكانيك الكم:

$$[f_1 , f_2]_{qu} = \frac{i}{\hbar}[\hat{f}_1 , \hat{f}_2] = \frac{i}{\hbar}(\hat{f}_1 \hat{f}_2 - \hat{f}_2 \hat{f}_1)$$

معادلة هاينزبرغ في ميكانيك الكم التي تقابل تماما معادلات الحركة في الميكانيك الكلاسيكي:

$$\frac{d\hat{p}}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{p}], \quad \frac{d\hat{x}}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{x}]$$

مسألة: ليكن لدينا جسم كتلته m وإحداثياته $(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{z})$ بجملة الاحداثيات الاسطوانية تعطى طاقته الكامنة بالعلاقة التالية:

$$\boldsymbol{V(\rho) = V_0 \ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)} \quad ; \boldsymbol{V_0 = const} \; ; \; \boldsymbol{\rho_0 = const}$$

1. **أوجد عبارة تابع لاغرانج للجسم المتحرك.**
2. **أوجد معادلات الحركة لهذا الجسم.**
3. **أثبت أن تابع هاملتون للجسم يكتب بدلالة العزوم المعممة وفق الصيغة التالية:**

$$H(\rho, p_\rho, p_\varphi, p_z) = \frac{1}{2m}(p^2\rho + \frac{p^2\varphi}{\rho} + p^2 z)$$

الحل:

$$L = T - V$$

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

$$\left.\begin{matrix} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \dot{x} = \dot{\rho}\cos\varphi - \rho\,\dot{\varphi}\sin\varphi \\ \dot{y} = \dot{\rho}\sin\varphi + \rho\,\dot{\varphi}\cos\varphi \\ \dot{z} = \dot{z} \end{matrix}\right\}$$

نعوض في عبارة الطاقة الحركية ونفك المتطابقة التربيعية ونجمع الحدود المتشابهه:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2\cos^2\varphi + \rho^2\,\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi - 2\dot{\rho}\rho\,\dot{\varphi}\sin\varphi\cos\varphi + \dot{\rho}^2\sin^2\varphi + \rho^2\,\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi + 2\dot{\rho}\rho\,\dot{\varphi}\sin\varphi\cos\varphi + \dot{z}^2$$

$$\Longrightarrow\ T = \frac{1}{2}m[\dot{\rho}^2 + \rho^2\,\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2]$$

وهي عبارة الطاقة الحركية.

$$\Longrightarrow L = \frac{1}{2}m[\dot{\rho}^2 + \rho^2\,\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2] - V_0\ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)$$

1. إيجاد معادلات الحركة باستخدام معادلات لاغرانج:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad ;\ j = 1,2,3\ ;\ j = (\rho,\varphi,z)$$

$$q_1 = \rho \quad \Longrightarrow\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} - \frac{\partial L}{\partial \rho} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\rho}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \rho} = \frac{1}{2}m(2\rho\,.\,\dot{\varphi}^2) - V_0\frac{1}{\frac{\rho}{\rho_0}}\,\frac{1}{\rho_0}$$

$$\frac{1}{2}m(2\rho\,.\,\dot{\varphi}^2) - \frac{V_0}{\rho}$$

نعوض في معادلة لاغرانج:

$$m\ddot{\rho} - m\rho\dot{\varphi}^2 + \frac{V_0}{\rho} = 0$$

$$q_2 = \varphi \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= m\,\rho^2\varphi\\ \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= 0\end{aligned}\right\}$$

$$\frac{d}{dt}(m\,\rho^2\varphi) = 0 \quad \Longrightarrow\ m(2\rho\dot{\rho})\dot{\varphi} + m\rho^2\ddot{\varphi} = 0$$

$$\Longrightarrow \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi} = 0$$

$$q_3 = z \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} &= m\,\dot{z} \\ \frac{\partial L}{\partial z} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

نعوض في معادلة لاغرانج :

$$m\,\ddot{z} \quad \Longrightarrow \ddot{z} = 0$$

إيجاد تابع هاملتون:

$$H = \sum_j p_j \dot{q}_j - L$$

$$H = p_\rho \dot{\rho} + p_\varphi \dot{\varphi} + p_z \dot{z} - L$$

$$L = \frac{1}{2} m[\dot{\rho}^2 + \rho^2\,\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2] - V_0 \ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)$$

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \quad \Longrightarrow p_\rho = \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}}$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}$$

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}}$$

$$p_\rho = \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = \frac{1}{2} m(2\dot{\rho}) = m\dot{\rho} \;\Longrightarrow \dot{\rho} = \frac{p_\rho}{m}$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{2} m(2\rho^2\dot{\varphi}) = m\rho^2\dot{\varphi} \;\Longrightarrow \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{m\rho^2}$$

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \frac{1}{2} m(2\dot{z}) = m\dot{z} \quad \Longrightarrow \dot{z} = \frac{p_z}{m}$$

نعوض في تابع لاغرانج:

$$L = \frac{1}{2} m\left[\frac{p_\rho^2}{m^2} + \rho^2 \frac{p_\varphi^2}{m^2\rho^4} + \frac{p_z^2}{m^2}\right] - V_0 \ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)$$

نعوض في تابع هاملتون:

$$H = p_\rho \frac{p_\rho}{m} + p_\varphi \frac{p_\varphi}{m\rho^2} + p_z \frac{p_z}{m} - \frac{1}{2} m \left[\frac{p_\rho^2}{m^2} + \rho^2 \frac{p_\varphi^2}{m^2 \rho^4} + \frac{p_z^2}{m^2} \right] + V_0 \ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)$$

نجمع الحدود المتشابهه:

$$H = \frac{1}{2} m \left[\frac{p_\rho^2}{m^2} + \rho^2 \frac{p_\varphi^2}{m^2 \rho^4} + \frac{p_z^2}{m^2} \right] + V_0 \ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)$$

سؤال إضافي: أوجد معادلات هاملتون القانونية للحركة.

$$\frac{\partial H}{\partial p_j} = \dot{q}_j \quad , \quad \frac{\partial H}{\partial q_j} = -\dot{p}_j$$

$$H = \frac{1}{2} m[\dot{\rho}^2 + \rho^2\, \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2] + V_0 \ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_j} = \dot{q}_j$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial H}{\partial p_\rho} = \dot{\rho} = \frac{p_\rho}{\mathrm{m}} \;\Longrightarrow\; p_\rho = \dot{\rho}\mathrm{m}$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{m\,\rho^2} \Longrightarrow p_\varphi = m\,\rho^2 \dot{\varphi}$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_z} = \dot{z} = \frac{p_z}{m} \;\Longrightarrow p_z = m\,\dot{z}$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = -\dot{p}_j$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial H}{\partial \rho} = -\dot{p}_\rho = m\rho\dot{\varphi}^2 + \frac{V_0}{\rho}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \varphi} = -\dot{p}_\varphi = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial z} = -\dot{p}_z = 0$$

<u>سؤال:</u> أوجد معادلة هاملتون – جاكوبي لحركة جسيم حر كتلته m في الاحداثيات الاسطوانية، حيث تعطى طاقته الكامنة بالعلاقة التالية:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H = 0$$

بالنسبة لتابع هاملتون تم الحصول عليه سابقاً.

$$p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j}$$

$$p_\rho = \frac{\partial S}{\partial \rho}, \qquad p_\varphi = \frac{\partial S}{\partial \varphi}, \qquad p_z = \frac{\partial S}{\partial z}$$

نعوض في تابع هاملتون:

$$H = \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right] + V_0 \ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)$$

نعوض في معادلة هاملتون – جاكوبي:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right] + V_0 \ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) = 0$$

<u>سؤال:</u> اكتب معادلة هاملتون - جاكوبي موضحاً دلالات الرموز. ثم اكتب معادلة هاملتون -جاكوبي لجسيم يتحرك بتأثير قوة تشتق من كمون $\boldsymbol{V(x,y,z,t)}$.

معادلة هاملتون – جاكوبي:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H = 0$$

H : تابع هاملتون.

S : تابع الفعل، ويعطى بالعلاقة الآتية:

$$S = \int L(q_j, \dot{p}_j, t)dt$$

نحسب تابع هاملتون للجسيم المتحرك:

$$H = T + V = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + V(x,y,z)$$

أما تابع هاملتون فهو:

$$\Longrightarrow H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) + V(x,y,z,t)$$

يعطى المشتق الجزئي لتابع الفعل بالنسبة للإحداثيات المعممة بالعلاقة الآتية:

$$\frac{\partial S}{\partial q_j} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = p_j \Longrightarrow \vec{p} = grad\ S$$

$$\Longrightarrow p_x = \frac{\partial S}{\partial x} \quad , \quad p_y = \frac{\partial S}{\partial y} \quad , \quad p_z = \frac{\partial S}{\partial z}$$

نضع المعادلة المطلوبة بالصيغة التالية:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right] + V(x,y,z,t) = 0$$

إذا استخدمنا الاحداثيات الكروية نحصل على المعادلة:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2\right] + V(r,\theta,\varphi,t) = 0$$

وإذا استخدمنا الإحداثيات الاسطوانية:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right] + V(\rho,\varphi,z,t) = 0$$

<u>سؤال:</u> أوجد معادلة حركة الهزاز التوافقي البسيط وفقاً لطريقة هاملتون.

تعطى الطاقة الكامنة لحركة جسم كتلته m معلق بنابض بالعلاقة:

$$V = \frac{1}{2}kx^2$$

وبالتالي تابع لاغرانج له يكتب بالعلاقة التالية:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

الاندفاع:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

وبالتالي يكون تابع هاملتون:

$$H = \sum_j p_j \dot{q}_j - L$$

$$= m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{p^2}{2m} + V = T + V$$

الجملة محافظة لأن تابع هاملتون يساوي الطاقة الكلية.

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \implies \dot{p} = m\ddot{x} \qquad (1)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -kx \qquad (2)$$

بالمساواة بين العلاقتين (1) و (2):

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

<u>سؤال:</u> اكتب وبرهن نظرية ليوفيل.

لنأخذ جملة جزئية واحدة من جملة مادية، ولندرس حالتها ضمن الفراغ الطوري. نرمز بـ $A_1, A_2, \ldots$ لأوضاع الجملة في الفراغ الطوري خلال الفترات الزمنية $t_1, t_2, \ldots$ فيمكن اعتبار حركة هذه النقاط كأنها حركة جزيئات غازية على كامل الفراغ الطوري عندها نطبق معادلة الاستمرار:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho\vec{v}) = 0$$

ρ الكثافة، $\vec{v}$ السرعة. في حالة الجريان المستقر يكون $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ عندئذ توضع العلاقة السابقة بالشكل:

$$div(\rho\vec{v}) = 0$$

نحسب تفرق المتجه $\rho\vec{v}$ في فراغ ذي 2n بعداً، وهو يساوي طبقاً لتعريف التفرق:

$$div(\rho\vec{v}) = \sum_{j=1}^{2n} \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j)$$

v_j هي مركبات السرعة في الفراغ الطوري وهي تساوي p_j أو q_j تبعاً للمحور الذي نسقط عليه.

$$\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial}{\partial q_j}(\rho\dot{q}_j) + \frac{\partial}{\partial p_j}(\rho\dot{p}_j)\right] = \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial \rho}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \rho}{\partial p_j}\dot{p}_j\right] + \sum_{j=1}^{n}\rho\left[\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_j} + \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_j}\right]$$

ومن معادلات هاملتون نجد:

$$\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_j} = \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial q_j}\ , \quad \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_j} = -\frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial p_j}$$

بالتعويض في المعادلة السابقة نجد:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\partial \rho}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \rho}{\partial p_j} \dot{p}_j \right] = 0$$

وهو التعبير الرياضي عما يسمى نظرية ليوفيل. وتعني أن تابع التوزع الإحصائي يبقى ثابتاً على المسارات الطورية للجمل الجزئية (مع الأخذ بعين الاعتبار أن الجمل الجزئية لاتتبادل التأثير فيما بينها ضمن الفراغ الطوري).

<u>سؤال:</u> أوجد تابع هاملتون لجسيم إذا أعطي تابع لاغرانج بالعلاقة التالية:

$$\boldsymbol{L = \frac{\dot{x}^2}{2} + \beta\, x\, \dot{x}^2 - \frac{\omega^2 x^2}{2} - \alpha x^2}$$

<u>الحل:</u>

$$H = T + V = \sum_j p_j\, \dot{q}_j - L$$

المتحولات هنا حسب لاغرانج هو فقط x:

$$j = 1 \implies q_1 = x, \qquad \dot{q}_1 = \dot{x}$$

$$H = p_x\, .\dot{x} - L$$

المطلوب تحديد p_x

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{x} + 2\beta x\dot{x}$$

$$\implies H = (\dot{x} + 2\beta x\dot{x}).\dot{x} - (\frac{\dot{x}^2}{2} + \beta\, x\, \dot{x}^2 - \frac{\omega^2 x^2}{2} - \alpha x^2)$$

$$= \dot{x}^2 + 2\beta x\dot{x}^2 - \frac{\dot{x}^2}{2} - \beta\, x\, \dot{x}^2 + \frac{\omega^2 x^2}{2} + \alpha x^2$$

$$= \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \beta\, x\, \dot{x}^2 + (\frac{\omega^2}{2} + \alpha)x^2$$

نكتب التابع بدلالة p_x:

$$\dot{x} = \frac{p_x}{(1 + 2\beta x)}$$

نعوض في تابع هاملتون:

$$H = \left(\frac{1}{2} + \beta\, x\right) \frac{p_x^2}{(1 + 2\beta x)^2} + (\frac{\omega^2}{2} + \alpha)x^2$$

<u>سؤال:</u> يكتب تابع هاملتون لهزاز توافقي بسيط أحادي البعد بالعلاقة التالية:

$$H(x\,,f(x)) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

نعرف الكميات التالية بدلالة الموضع وكميات الحركة:

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2}}(x + i\frac{p}{m\omega})$$

$$a^* = \sqrt{\frac{m\omega}{2}}(x - i\frac{p}{m\omega})$$

1. **برهن أن:** $H = \omega\, a\, a^*$.
2. **برهن ان:** $[a\,, a^*] = i$ و $[a\,, H] = i\omega a$ و $[a^*\,, H\,] = -i\omega a^*$
3. **برهن أن:** $a(t) = a_0 e^{-i\omega t}$ و $a^*(t) = a_0 e^{+i\omega t}$

الحل:

.1

$$a\, a^* = \sqrt{\frac{m\omega}{2}}\left(x + i\frac{p}{m\omega}\right) \times \sqrt{\frac{m\omega}{2}}\left(x - i\frac{p}{m\omega}\right)$$

$$= \frac{m\omega}{2}\left(x^2 - i^2\frac{p^2}{m^2\omega^2}\right)$$

$$= \frac{m\omega}{2}\left(x^2 + \frac{p^2}{m^2\omega^2}\right)$$

$$= \left(\frac{m\omega}{2}x^2 + \frac{m\omega}{2}\frac{p^2}{m^2\omega^2}\right)$$

$$= \left(\frac{m\omega}{2}x^2 + \frac{p^2}{2m\omega}\right) = \frac{1}{\omega}\left(\frac{m\omega^2}{2}x^2 + \frac{p^2}{2m}\right) \Longrightarrow H = \omega\, a\, a^*$$

2. الحل حسب أقواس بواصون:

$$[a\,, a^*]_{p_j\,,q_j} = \frac{\partial a}{\partial p_j}\cdot\frac{\partial a^*}{\partial q_j} - \frac{\partial a}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial a^*}{\partial p_j}$$

$$j = 1 \;\Longrightarrow p_1 = p_x\,,\;\; q_1 = x$$

$$\Longrightarrow\; [a\,, a^*]_{p_x\,,x} = \frac{\partial a}{\partial p_x}\cdot\frac{\partial a^*}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial x}\cdot\frac{\partial a^*}{\partial p_x}$$

$$= \frac{i}{m\omega}\sqrt{\frac{m\omega}{2}} \cdot \sqrt{\frac{m\omega}{2}} - \sqrt{\frac{m\omega}{2}}\left(-\frac{i}{m\omega}\sqrt{\frac{m\omega}{2}}\right)$$

$$= \frac{i}{2} - \frac{-i}{2} = \frac{2i}{2} = i$$

وبنفس الطريقة:

$$[a^* , a] = -i$$

$$[a , H]_{p_x , x} = -i\omega a$$

$$[a , H]_{p_x , x} = \frac{\partial a}{\partial p_x} \cdot \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial x} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_x}$$

$$= \sqrt{\frac{m\omega}{2}}\left(\frac{i}{m\omega} \cdot \frac{2\, m\, \omega^2 x}{2} - \frac{2p}{2m}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{m\omega}{2}}\left(\frac{i}{m\omega} m\omega^2 x - \frac{p}{m}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{m\omega}{2}}\,(i\omega x - \frac{p}{m})$$

نخرج $i-$ عامل مشترك.

$$[a , H]_{p_x , x} = -i\sqrt{\frac{m\omega}{2}}\left(\frac{p}{im} - \omega x\right)$$

نضرب الحد $\frac{p}{im}$ بالمرافق (البسط والمقام):

$$= -i\sqrt{\frac{m\omega}{2}}\left(\frac{-i\, p}{m} - \omega x\right)$$

نخرج $-$ عامل مشترك :

$$[a , H]_{p_x , x} = i\sqrt{\frac{m\omega}{2}}\left(\frac{i\, p}{m} + \omega x\right) = i\omega a$$

مكتبة A to Z