



كلية العلوم

القسم : الفيزياء

السنة : الثانية

١

المادة : اهتزازات وامواج

المحاضرة : الخامسة/نظري/دكتورة

{{{ A to Z مكتبة }}}}

Maktabat A to Z Facebook Group

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960



انتشار الأمواج

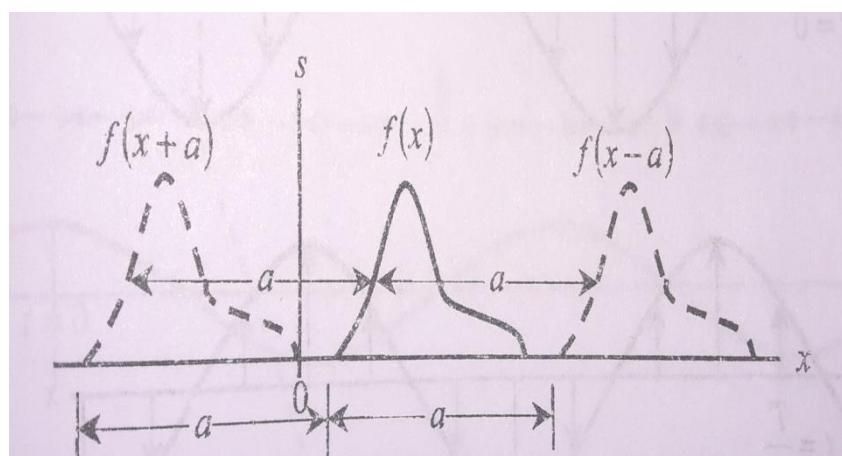
الأمواج الطولانية: تسمى الموجة التي تنتشر بحيث يكون اتجاه الاهتزاز منطبقاً على اتجاه انتشار الموجة بالموجة الطولانية، وتعتبر الأمواج الصوتية أهم الأمثلة على الأمواج الطولانية.

الأمواج العرضانية: تسمى الموجة التي تنتشر بحيث يكون اتجاه الاهتزاز عمودياً على اتجاه انتشار الموجة بالموجة العرضانية، ومثال على ذلك: الأمواج التي تنتشر على وتر مشدود، والأمواج التي تنتشر على سطح الماء، وكذلك الأمواج الكهرومغناطيسية بما فيها أمواج الضوء.

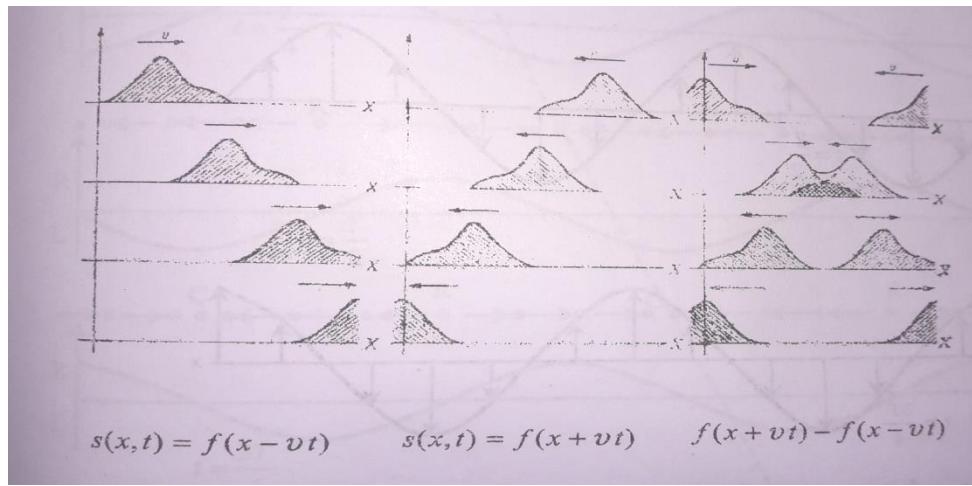
أمواج الفتل: تسمى الموجة التي تنتشر بشكل لولبي بينما يكون سطح الدائرة عمودياً بالنسبة لاتجاه انتشار الموجة بموجة الفتل. تحدث هذه الأمواج عند قتل قضيب معدني حول نفسه.

الوصف الرياضي للحركة الموجية:

نعتبر التابع $s = f(x)$ الممثل بالمنحني المستمر المبين بالشكل (1). إذا استبدلنا كل متغير x بآخر $(x - a)$ نحصل على التابع $s = f(x - a)$ ، ونلاحظ أنَّ شكل منحني التابع لا يتغير. وإذا استبدلنا كل متغير x بآخر $(x + a)$ نحصل على التابع $s = f(x + a)$ ، ونلاحظ أنَّ شكل منحني التابع لا يتغير أيضاً. بفرض أنَّ $a = vt$ ، حيث t الزمن. عندئذ منحني التابع $s(x, t) = f(x - vt)$ ينتقل نحو اليمين بسرعة v تسمى سرعة الطور كما يبدو في الشكل (2a)، وبالمثل منحني التابع $s(x, t) = f(x + vt)$ ينتقل نحو اليسار بسرعة الطور، كما في الشكل (2b)، أمّا الشكل (2c) فيمثل انتشار موجتين تتحركان باتجاهين متعاكسين، إما باتجاه التقابل أو باتجاه التباعد وبالسرعة v .



الشكل (1): انسحاب دون تشوه للتابع $f(x)$.



(a)

(b)

(c)

الشكل (2): (a) انتشار الموجة نحو اليمين، (b) انتشار الموجة نحو اليسار، (c) انتشار موجتين باتجاهين متعاكسين.

نستنتج مما سبق أنَّ المعادلة الرياضية للحركة الموجية هي من الشكل التالي:

$$s(x, t) = f(x \pm vt) \quad (1)$$

تمثِّل المعادلة الأخيرة صيغة رياضية لوصف حالة فизيائية تنتشر دون تغير بالاتجاه الموجب أو السالب للمحور x وهذا ما نسميه حركة موجية. يمكن أن تمثِّل الدالة $s(x, t)$ (التابع) أنواعاً أخرى من الحالات الفيزيائية مثل تشوّه الجسم الصلب، أو تغيير الضغط في غاز، أو الحقل الكهربائي أو المغناطيسي، وغيرها.

إنَّ الحالة الأكثر أهمية هي الحالة التي يكون $s(x, t)$ فيها تابعاً جيبياً مثل:

$$s(x, t) = s_0 \sin K(x - vt) \quad (2)$$

إذا بدلنا x بالقيمة $x + \left(\frac{2\pi}{K}\right)$ نحصل على قيمة $s(x, t)$ نفسها، أي أنَّ:

$$s \left[x + \left(\frac{2\pi}{K} \right) - vt \right] = s_0 \sin K \left[x + \left(\frac{2\pi}{K} \right) - vt \right]$$

$$s \left[x + \left(\frac{2\pi}{K} \right) - vt \right] = s_0 \sin [K(x - vt) + 2\pi]$$

$$s \left[x + \left(\frac{2\pi}{K} \right) - vt \right] = s(x - vt)$$

نسمى المقدار $\left(\frac{2\pi}{K}\right)$ طول الموجة أو الدور المكاني للموجة ونرمز له بالرمز λ ، K يُسمى العدد الموجي. وبالتالي فإنَّ المعادلة (2) تكتب بالصيغة التالية:

$$s(x, t) = s_0 \sin K(x - vt) = s_0 \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} (x - vt) \right] \quad (3)$$

تمثل المعادلة الأخيرة معادلة موجية جيبية تنتشر نحو اليمين بطول موجي λ ، وبسرعة طور v على طول المحور X. ويمكن كتابتها بالشكل التالي:

$$s(x, t) = s_0 \sin(Kx - wt) \quad (4)$$

حيث: $w = K\nu = \frac{2\pi\nu}{\lambda}$ ، ولدينا سابقاً $w = 2\pi\nu$ حيث ν التواتر الخطي (التردد) الذي تتغير من أجله الحالة الفيزيائية في كل نقطة x، يكون لدينا:

$$\frac{2\pi\nu}{\lambda} = 2\pi\nu \Rightarrow \nu = \lambda\nu \quad (5)$$

تمثل هذه المعادلة العلاقة بين تواتر الحركة الموجية وسرعة انتشارها. إذا كان T دور الاهتزاز في كل نقطة $s = s_0 \sin \frac{2\pi}{T} \left(x - \frac{t}{\nu} \right)$ يمكن أن تكتب بالشكل:

$$s(x, t) = s_0 \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \quad (6)$$

وبنفس الطريقة نجد أن:

$$s = s_0 \sin K(x + vt) = s_0 \sin(Kx + wt) = s_0 \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} + \frac{t}{T} \right) \quad (7)$$

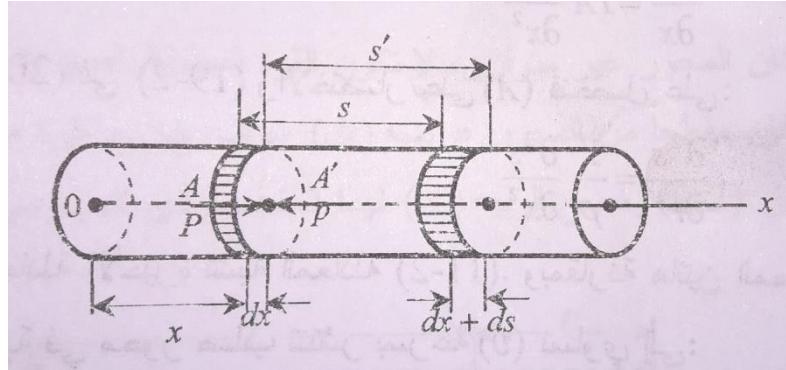
تمثل هذه الصيغة معادلة موجية جيبية تنتشر بالاتجاه السالب للمحور X.

انتشار أمواج الضغط في غاز داخل وعاء اسطواني:

سندرس في هذه الفقرة انتشار أمواج الضغط في غاز ما، ولتسهيل الدراسة نعتبر أنَّ الغاز موجود داخل وعاء اسطواني ونفرض أنَّ (P_0 , ρ_0) الضغط والكتلة الحجمية للغاز في حالة التوازن أيَّ أنهما مستقلان عن المتغير x. إذا تغير ضغط الغاز فإنَّ عنصر الحجم ($A dx$) سوف يبدأ بالحركة لأنَّ الضغطين (\bar{P} , P_0) على (\bar{A} , A) مختلفان وينشأ عن اختلافهما قوة محصلة، شكل (3). هذا بدوره يقود إلى انتقال المقطع A بالمقدار s وانتقال المقطع \bar{A} بالمقدار \bar{s} وتصبح سماكة عنصر الحجم بعد التشوه مساوية إلى $(dx + ds) - (\bar{s} - s) = ds$ ، وبما أنَّ تغير حجم الغاز يتراافق عادةً بتغيير الكثافة بسبب تغير ضغط الغاز فإنَّ كتلة عنصر الحجم المعتبر في حالة التوازن تساوي $\rho_0 A dx$ وكتلته في حالة الانضغاط تساوي

حيث ρ الكتلة الحجمية للغاز. وحسب قانون انحفاظ الكتلة فإن هاتين الكتلتين متساويتان، أي أنّ:

$$\rho A(dx + ds) = \rho_0 Adx \Rightarrow \rho \left(1 + \frac{\partial s}{\partial x}\right) = \rho_0 \quad (8)$$



الشكل (3): أمواج الضغط في أسطوانة غاز.

وعليه فإنّ الكتلة الحجمية للغاز بعد تغير الضغط تساوي إلى:

$$\rho = \frac{\rho_0}{\left(1 + \frac{\partial s}{\partial x}\right)} \quad (9)$$

وبما أنّ $\frac{\partial s}{\partial x}$ صغيرة فإنه يمكن استبدال المقدار $\left(1 + \frac{\partial s}{\partial x}\right)^{-1}$ بالحدين الأول والثاني من منشوره، أي بالحدين 1 - $\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)$:

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{\partial s}{\partial x}\right) \Rightarrow \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = -\frac{\partial s}{\partial x} \quad (10)$$

نعلم أنّ الضغط P يرتبط بالكتلة الحجمية ρ بمعادلة الحالة، ويمكن كتابة $P = f(\rho)$

بعد نشره وفق سلسلة تايلور كما يلي:

$$P = P_0 + (\rho - \rho_0) \left(\frac{dP}{d\rho}\right)_{\rho_0} + \frac{1}{2} (\rho - \rho_0)^2 \left(\frac{d^2 P}{d\rho^2}\right)_{\rho_0} + \dots \dots \dots \quad (11)$$

وفي حالة التغيرات الصغيرة نكتفي بالحدين الأول والثاني، فيكون لدينا:

$$P = P_0 + (\rho - \rho_0) \left(\frac{dP}{d\rho}\right)_{\rho_0} \quad (12)$$

لتدخل إلى هذه العبارة الرمز التالي الذي يمثل عامل المرونة الحجمي والمقدر بواحدة $N \cdot m^{-2}$ وهي الواحدة نفسها المستخدمة من أجل الضغط:

$$\kappa = \rho_0 \left(\frac{dP}{d\rho} \right)_{\rho_0} \quad (13)$$

وعليه يمكن أن نكتب العلاقة:

$$P = P_0 + \kappa \frac{(\rho - \rho_0)}{\rho_0} \quad (14)$$

تسمى المعادلة الأخيرة قانون هوك في المواقع، ونكتب باستخدام المعادلة (10) بالشكل التالي:

$$P = P_0 - \kappa \frac{\partial s}{\partial x} \quad (15)$$

لتعيين معادلة حركة عنصر الحجم نقوم بما يلي: لدينا كتلة عنصر الحجم (Adx) تساوي $(\rho_0 Adx)$ وتسارعه $\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$ والغاز الموجود إلى يسار عنصر الحجم يدفعه نحو اليمين بقوة $F = PA$ ، كما ويدفع الغاز الموجود إلى يمين عنصر الحجم نحو اليسار بقوة $\hat{F} = \hat{P}A$. إن القوة المحصلة في الاتجاه $+X$ تساوي $dP = \hat{P} - P$ ، حيث فإن معادلة الحركة هي:

$$-AdP = \rho_0 Adx \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \quad (16)$$

نلاحظ من المعادلة (16) وجود متغيرين هما الانتقال s والضغط P . ومن جهة أخرى بمفاضلة المعادلة (15) بالنسبة للمتغير x ، حيث $P_0 = cte$ ذاته، نجد:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\kappa \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} \quad (17)$$

بمساواة المعادلتين (16) و (17) طرفاً لطرف يمكن أن نكتب:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{\kappa}{\rho_0} \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} \quad (18)$$

بمقارنة المعادلة (18) مع معادلة انتشار الأمواج لماكسويل أو ما يسمى المعادلة التفاضلية الموجية في بعد واحد: $\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}$ ، نجد أنَّ أمواج الضغط في غاز داخل وعاء اسطواني تنتشر بسرعة تساوي إلى:

$$v = \sqrt{\frac{\kappa}{\rho_0}} \quad (19)$$

تمرين: يهتز وتر مشدود بحركة اهتزازية توافقية بسيطة تواترها (250Hz) وسعتها (2.6m) وذلك عندما نطبق عليه قوة شد مقدارها (140N) من أحد طرفيه. فإذا كانت النهاية الأخرى للوتر مزاحة نحو الأعلى بمقدار (1.6m) وكانت الكتلة الخطية للوتر تساوي (0.12Kg/m) أوجد مايلي:

- طول الموجة المتشكلة؟ - اكتب معادلة الموج التي تصف الموجة المستقرة؟

-1 الحل:

$$v = \sqrt{\frac{F_T}{m}} = \sqrt{\frac{140}{0.12}} = 34.15 \text{ m/sec}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{34.15}{250} = 0.136 \text{ m}$$

- 2 - تُعطى معادلة الموجة المتحركة نحو اليمين بالعلاقة التالية:

$$y = y_0 \sin(Kx - \nu t + \varphi)$$

بتغيير معطيات المسألة في معادلة الموجة في اللحظة ($t = 0$) نجد:

$$1.6 = 2.6 \sin(\varphi) \Rightarrow \varphi = \sin^{-1}\left(\frac{1.6}{2.6}\right) \cong 38^0 = 38 \times \frac{\pi}{180} = 0.66 \text{ rad}$$

$$\nu = 2\pi\nu = 2\pi \times 250 = 1570 \text{ rad/s} \Rightarrow K = \frac{2\pi}{\lambda} = 46.19 \text{ m}^{-1}$$

نعرض في معادلة الموجة نجد:

$$y = 2.6 \sin((46.19)x - 1570t + 0.66)$$



A to Z مكتبة