كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الاولى**

المادة : هندسة تحليلية

المحاضرة : الخامسة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

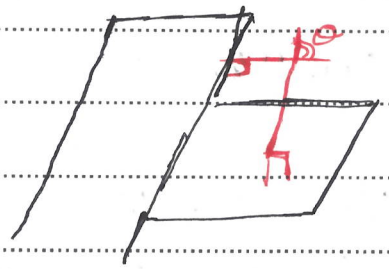
Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

زاوية مستويين:



ليكن لدينا المستويان

$$ax_1+by_1+cz_1+d_1=0$$
$$ax_2+by_2+cz_2+d_2=0$$

$\vec{w_1}(a_1,b_1,c_1)$ $\vec{w_2}(a_2,b_2,c_2)$

$$\cos\theta=\frac{|w_1\cdot w_2|}{|w_1|\cdot|w_2|}$$

$$=\frac{|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

حالات خاصة:

(1) - إذا كان $\cos\theta=0\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{2}$

$\Leftarrow$ المستويان متعامدان (الناظمان متعامدان أي أن $w_1\cdot w_2=0$)

(2) - إذا كان $\cos\theta=1\Rightarrow\theta=0(2\pi)$

$\Leftarrow$ المستويان متوازيان (الناظمان متوازيان w_1 و w_2 مرتبطان خطياً)

(3) - في حالة تطابق المستويان:

إذا كانا متوازيان وتوجد نقطة مشتركة m حيث:

$$m\in P_1 \text{ و } m\in P_2 \quad ; \quad \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}=\frac{d_1}{d_2}$$

مثال: برهن أن المستويين متوازيان ثم اوجد البعد بينهما:

$P_1: x+2y+4z-9=0$

$P_2: 5x+10y+20z-3=0$

الحل: $w_1(1,2,4)$ $w_2(5,10,20)$

$\frac{1}{5}=\frac{2}{10}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5} \Rightarrow w_1 \parallel w_2$

$\Rightarrow$ المستويان متوازيان

ولإيجاد البعد بينهما نوجد المعادلة الناظمة لأحدهما ((ايجاد البعد عن نقطة للمستوي))

$\|\vec{w_1}\| = \sqrt{1+4+16} = \sqrt{21}$

$\|w_2\| = \sqrt{25+100+200} = \sqrt{525}$

المعادلة الناظمية لـ P_1:

$\frac{1}{\sqrt{21}}x+\frac{2}{\sqrt{21}}y+\frac{4}{\sqrt{21}}z-\frac{9}{\sqrt{21}}=0$

المعادلة الناظمية لـ P_2:

$\frac{5}{\sqrt{525}}x+\frac{10}{\sqrt{525}}y+\frac{20}{\sqrt{525}}z+\frac{3}{\sqrt{525}}=0$

بعد P_1 عن مبدأ الإحداثيات $h_1=\frac{-9}{\sqrt{21}}$

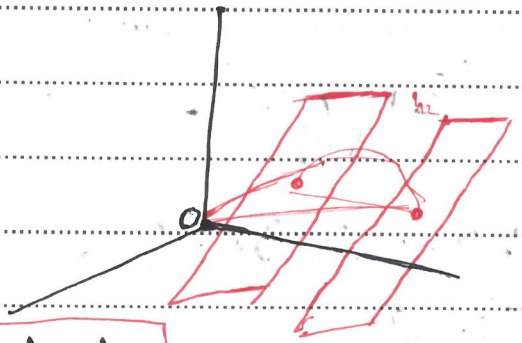
بعد P_2 عن مبدأ الإحداثيات $h_2=\frac{-3}{\sqrt{525}}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

بما أن h_1 و h_2 من نفس الإشارة أي أن مبدأ الإحداثيات يقع في نفس الجهة بالنسبة للمستويين فالبعد بين المستويين

$$d = h_1 - h_2$$

$$= \frac{5}{\sqrt{21}} - \frac{3}{\sqrt{525}}$$



ملاحظة: إذا كان h_1 و h_2 من طرفين مختلفين فإن مبدأ الإحداثيات في جهتين مختلفتين فالبعد بين المستويين عندئذ هو: $h = h_1 + h_2$

مثال: أوجد الزاوية بين المستويين:

$$P_1 : X - Y + Z - 2 = 0$$

$$P_2 : 2X - Y + Z - 3 = 0$$

الحل: $W_1(1,-1,1)$ $W_2(2,-1,1)$

$\|W_1\| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$ $\|W_2\| = \sqrt{2^2+1+1} = \sqrt{6}$

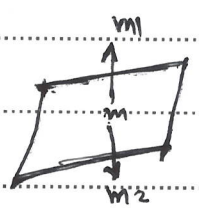
$|W_1 \cdot W_2| = 2$

$$\cos\theta = \frac{|2|}{\sqrt{3}\times\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{18}} = \frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

القوى التحليلية لنقطة بالنسبة للمستوي:

لكن لدينا المستوي المعين بالمعادلة:

$$aX + bY + cZ + d = 0$$



ولتكن $M_1(X_1, Y_1, Z_1)$ $M_2(X_2, Y_2, Z_2)$

نقطتان خارج المستوي وفي جهتين مختلفتين بالنسبة للمستوي، المستقيم المار من M_1 و M_2 ويقطع المستوي P في نقطة $M(X, Y, Z)$ عندئذ النقطة M نقطة قاسمة لـ $[M_1M_2]$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$X=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} \qquad Y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} \qquad Z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$$

M تنتمي الى المستوي وهي تحقق معادلته

$$a\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\right)+b\left(\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right)+c\left(\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right)+d=0$$

$$ax_1+by_1+cz_1+d+\lambda(ax_2+by_2+cz_2+d)=0$$

$$\lambda=-\frac{ax_1+by_1+cz_1+d}{ax_2+by_2+cz_2+d}$$

نتيجة: لتحديد موضع نقطة بالنسبة للمستوي نعوض إحداثيات النقطة في معادلة المستوي فإذا كان الناتج موجب النقطة فوق المستوي وإذا كان سالب النقطة تحت المستوي:

$$dist(M_0,P)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

مثال: حدد موضع النقطة $M_1(1,2,3)$ والنقطة $M_2(0,2,-1)$ بالنسبة للمستوي:

$$P(x,y,z)=x-y+3z-10=0$$

الحل: لنوجد القوى التحليلية لكل من M_1 و M_2

النقطتان بجهة واحدة بالنسبة للمستوي

$P(M_1)=1-2+9-10=-2<0$

M_1 تحت المستوي

$P(M_2)=-2-3-10=-15<0$

M_2 تحت المستوي

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال:

اوجد بعد النقطتين $A(1,-1,3)$ $B(-1,3,5)$ عن المستوى

$P: X-2Y+3Z-6=0$

ثم حدد وضع النقطتين بالنسبة لـ P

الحل: نعوض A في معادلة المستوى:

$P(A)=1-2(-1)+3(3)-6=6>0$

A فوق المستوى P

نعوض B في معادلة المستوى:

$P(B)=-1-6-6=-13<0$

B تحت المستوى P

النقطتين في جهتين مختلفتين بالنسبة للمستوى

$$dist(A,P)=\frac{|6|}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}=\frac{6}{\sqrt{14}}$$

$$dist(B,P)=\frac{|-13|}{\sqrt{14}}=\frac{13}{\sqrt{14}}$$

ملاحظة: لحساب البعد بين المستويين يمكن اتباع طريقة أولى: إيجاد المعادلة الناظمية للمستوى ثم إيجاد بعد مبدأ الإحداثيات عن ذلك المستوى.

طريقة ثانية: إيجاد نقطة تنتمي لأحد المستويين ثم إيجاد بعد هذه النقطة عن المستوى الآخر.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: أوجد البعد بين المستويين:

$P_1: 2x-y-2z+7=0$

$P_2: 2x-y-2z-5=0$

ط1: نوجد المعادلة الناظمية لكل منهما (h_1, h_1+h_2 مختلفين بالإشارة)

ط2: لنوجد نقطة من المستوي الأول:

نفرض $x=1 \quad y=2$

$\Rightarrow 2-2-2z+7=0 \Rightarrow z=\frac{7}{2}$ ، $M_0(1,2,\frac{7}{2})$

نوجد بعد هذه النقطة عن المستوي P_2

$$dist(M_0,P_2)=\frac{|2-2-7-5|}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{12}{\sqrt{9}}=4$$

- معادلة المستوي المنصف لزاويتي مستويين:

ليكن المستويان:

$P_1: ax_1+by_1+cz_1+d_1=0$

$P_2: ax_2+by_2+cz_2+d_2=0$

مستويان متقاطعان

- نسمي بالتعريف المحل الهندسي للنقاط المتساوية البعد عن المستويين بالمستوي المنصف لزاويتي المستويين
- نسمي المستوي المنصف للزاوية الحادة بالمستوي الداخلي.
- نسمي المستوي المنصف للزاوية المنفرجة بالمنصف الخارجي.

ليكن $M(x,y,z)$ نقطة من المستوي المنصف $\Leftarrow$ فهي متساوية البعد عن المستويين: $dist(M,P_1)=dist(M,P_2)$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\Rightarrow \frac{|P_1(M)|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}} = \frac{|P_2(M)|}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

$$= \frac{P(M_1)}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}} = \pm \frac{P(M_2)}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

أي انتهينا على معادلتين ولتحديد أيهما المنصف الخارجي وأيهما المنصف الداخلي نأخذ إشارة الجداء $(W_1 \cdot W_2)$ فإذا كانت إشارة المتوسط المنصف تخالف الجداء

$W_1 \cdot W_2 > 0 \Rightarrow$ { الداخلي (-) / الخارجي (+) }

$W_1 \cdot W_2 < 0 \Rightarrow$ { الخارجي (-) / الداخلي (+) }

مثال: أوجد معادلتي المنصف الداخلي والخارجي للزاوية المتوسطة:

أو « أوجد المحل الهندسي لمجموعة النقاط المتساوية البعد عن المستويين »:

$$P_1: 5X+3Y-4Z-9=0$$

$$P_2: 3X-4Y+5Z-3=0$$

الحل: لتكن M نقطة كيفية من المستوي المنصف بالتالي

$$P_1(M) = 5X+3Y-4Z-9=0 \qquad M(X,Y,Z)$$

$$P_2(M): 3X-4Y+5Z-3=0$$

$$dist(M,P_1) = dist(M,P_2)$$

$$\frac{|5X+3Y-4Z-9|}{\sqrt{25+9+16}} = \frac{|3X-4Y+5Z-3|}{\sqrt{9+16+25}}$$

$$= (5X+3Y-4Z-9) = \pm (3X-4Y+5Z-3)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$W_1 \cdot W_2 = 15 - 12 - 20 = -17 < 0$

بالتالي المنصف الداخلي يوافق الإشارة الموجبة والخارجي يوافق الإشارة السالبة

منصف داخلي $5X+3Y-4Z-9 = +(3X-4Y+5Z-3)$

$5X+3Y-4Z-9 = 3X+4Y+5Z-3$

$2X+7Y-9Z-6=0$

المنصف الخارجي يوافق الإشارة السالبة:

$5X+3Y-4Z-9 = -(3X-4Y+5Z-3)$

$5X+3Y-4Z-9 = -3X+4Y-5Z+3$

$8X-Y+Z-12=0$

ملاحظة: إذا كان المستويان متعامدان

$W_1 \cdot W_2 = 0$

لا يمكن التمييز بين المنصف الداخلي والخارجي

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z