كلية العلوم

القسم : الفيزياء

السنة : الاولى

المادة : هندسة تحليلية

المحاضرة : الرابعة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

٥

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

المستوي في الفضاء :

تعريف : المستوي هو سطح غير محدد ويتعين المستوي بإحدى الطرق :

(1) مستقيم ونقطة خارجة .

(2) ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة .

- معادلة مستوي يمر من نقطة معلومة ويعامد متجه :

تنتمي النقطة $M(x,y,z)$ إلى المستوي المار من النقطة $M_0(x_0,y_0,z_0)$ المعلومة والمتعامد مع المتجه : $\vec{u}(a,b,c)$

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

$$ax+by+cz+d=0$$

حيث : $d=-ax_0-by_0-cz_0$

وهي المعادلة النموذجية للمستوي

مثال : أوجد معادلة المستوي مار بـ $M(1,-2,3)$ ويعامد $\vec{v}(-1,0,2)$

الحل :

$$-(x-1)+0(y+2)+2(z-3)=0$$

$$-x+2z-5=0$$

حالات خاصة :

1- إذا كان المستوي يمر من مبدأ الإحداثيات :

$$a(x-0)+b(y-0)+c(z-0)=0$$

فإن $O(0,0,0)$ تحقق معادلته :

$$ax+by+cz=0 \Rightarrow d=0$$

2. إذا كان المستوي موازي للمحور oZ كل نقطة من المستوي بالشكل $(x_0, y_0, 0)$ أي انه ناظم المستوي $\vec{n}$ يعامد محور oZ أي انه المركبة $c=0$ ومعادلة المستوي $P: ax+by+d=0$

3. تكون معادلة المستوي الموازي للمحور oX بالشكل: $P: by+cz+d=0$ أو $P: ax+cz+d=0$

4. الموازي للمحور oY تكتب بالشكل $P: ax+cz+d=0$

5. المستوي P الموازي للمستوي oXY أي انه يوازي المحور oX و oY فتكون معادلة P من الشكل:

$$P: cz+d=0$$
$$\Rightarrow z=-\frac{d}{c} \Rightarrow z=h$$

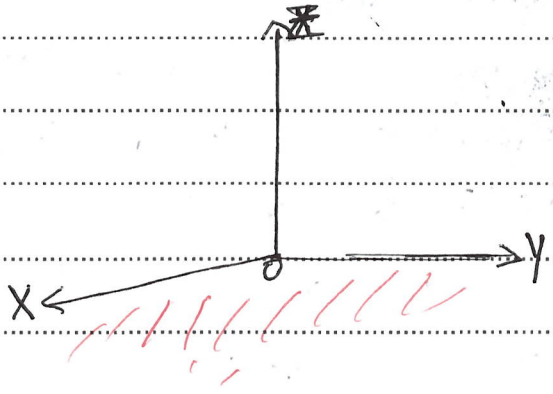
6. المستوي الموازي المستوي oXZ تكون معادلته من الشكل:

$$P: by+d=0 \Rightarrow y=-\frac{d}{b} \Rightarrow y=h_1$$

7. المستوي يوازي oZ تكتب معادلته بالشكل:

$$P: ax+d=0 \Rightarrow x=-\frac{d}{x} \Rightarrow x=h_2$$

معادلة مستوي ماريس إلى الإحداثيات ويوازي المستوي oXY



$cz+d=0 \quad d=0$

$\Rightarrow cz=0 \Rightarrow z=0$

المستوي المار بالمبدأ ويوازي oXZ

$\Leftarrow y=0$

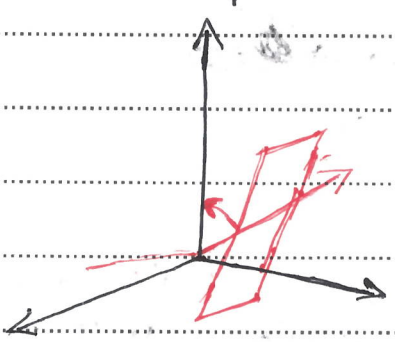
المستوي المار بالمبدأ ويوازي oYZ

$\Leftarrow x=0$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

المعادلة الناظمية لمستوي:

لنوجد معادلة مستوي بدلالة جيب تمام التوجيه الناظم لمستوي:



نقسم طرفي المعادلة على طويلة الناظم:

$$ax+by+cz+d=0$$

$$\vec{v}=(a,b,c)\Rightarrow \|\vec{v}\|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c}}x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}y+\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}z+\frac{d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=0$$

حيث $h=\dfrac{d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$$\alpha x+\beta y+\gamma z-h=0$$

حيث h بعد نقطة المبدأ عن المستوي

تمثل المعادلة السابقة المعادلة الناظمية للمستوي

مثال: أوجد المعادلة الناظمية للمستوي:

$$P:\ x-y+3z+10=0$$

الحل:

$$\vec{v}(+1,-1,+3)$$

$$\|\vec{v}\|=\sqrt{1^2+1^2+3^2}=\sqrt{11}$$

$$P:\ \frac{1}{\sqrt{11}}x-\frac{1}{\sqrt{11}}y+\frac{3}{\sqrt{11}}z+\frac{10}{\sqrt{11}}=0$$

- أوجد بعد نقطة المبدأ عن المستوي P:

$$d=\frac{10}{\sqrt{11}}$$

مثال: أوجد معادلة مستوي P يمر بـ $M(0,1,2)$ ويعامد $\overrightarrow{M_1M_2}$

$$M_1(1,-1,3)\quad M_2(2,-2,1)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الحل:

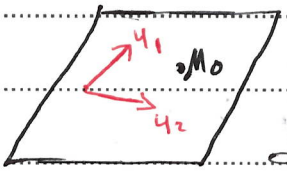
$\overrightarrow{M_1M_2}(1,-1,-2)$

$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$1(x-0)-1(y-1)-2(z-2)=0$

$x-y-2z+5=0$

- معادلة مستوي يمر من نقطة معلومة ويوازي متجهين $\vec{u_1}$ و $\vec{u_2}$



$M_0(x_0,y_0,z_0)$ ويوازي $\vec{u_1}$ و $\vec{u_2}$ تحدد هذه الحالة

إلى حالة نقطة معلومة وناظم حيث الناظم هو

الشعاع الناتج عن الجداء الشعاعي (والمتجهين) للقاعدين

$\vec{u_1}$ و $\vec{u_2}$ $\quad \vec{v}=\vec{u_1}\times\vec{u_2}$

مثال: أوجد معادلة مستوي يمر بالنقطة $M(1,2,-3)$

ويوازي $\vec{v_1}(1,2,-3)$

$\vec{v_2}(-1,0,2)$

الحل:

$$\vec{v}=\vec{v_1}\wedge\vec{v_2}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=i\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}-j\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}+k\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=4\vec{i}-\vec{j}(2-3)+\vec{k}(2)$$

$$=4\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k} \qquad \vec{v}(\overset{a}{4},\overset{b}{1},\overset{c}{2})$$

$M(\overset{x_0}{1},\overset{y_0}{-2},\overset{z_0}{-3})$

$P: a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$4(x-1)+1(y+2)+2(z+3)=0$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\Rightarrow P_1 \; 4x+y+2z-8=0$

معادلة مستوي يمر بثلاث نقاط لا تقع على استقامة واحدة :

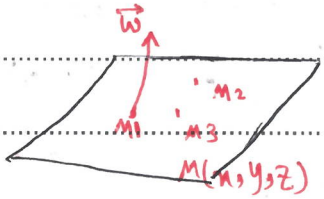
لتكن لدينا النقاط M_1, M_2, M_3 لإيجاد معادلة مستوي مار بهذه النقاط

نشكل شعاعين لهما نفس البداية : $\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}$

ثم نوجد مركبات الشعاع الناظم على المستوي

$\vec{v} = \overrightarrow{M_1M_2} \wedge \overrightarrow{M_1M_3}$

ويمكن حساب معادلة المستوي المار بثلاث نقاط .



- M نقطة من المستوي التالي :

$M M_1 . W = 0$

$M_1M . (M_1M_2 . M_1M_3) = 0$

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}$$

مثال : أوجد معادلة مستوي مر بالنقاط : $M_1(1,2,3)\; M_2(0,2,4)$

الحل : معادلة المستوي المار بـ M_1 وبعامدا $\overrightarrow{M_1M_2}$ و $\overrightarrow{M_1M_3}$ $M_3(1,-1,-2)$

$$\begin{vmatrix} X-1 & y-2 & z-3 \\ 0-1 & 2-2 & 4-3 \\ 1-1 & -1-2 & -2-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X-1 & y-2 & z-3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -5 \end{vmatrix}$$

$= (X-1)(3) - (y-2)(5) + (z-3)(3)$

$= 3X - 5y + 3z - 2 = 0$

مثال : أوجد معادلة المستوي إذا علمت أن طول العمود النازل عليه من نقطة الأصل (المبدأ) يساوي 2 ، وإذا علمت أن وسطاء توجيه ناظم المستوي هي $(3, 2, \sqrt{3})$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

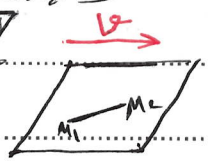
الحل:

$\alpha X+\beta Y+\gamma Z-h=0$ $\quad h=\frac{-d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=2$

$3X+2Y+\sqrt{3}Z-2=0$

معادلة مستوي مؤثر بنقطتين معلومتين M_1, M_2 ويوازي متجه معلوم $\vec{v}(a,b,c)$

يمكن رد هذه المسألة الى مسألة إيجاد معادلة مستوي مؤثر بنقطة ويعامد متجه معين



$\vec{w}=\vec{v}\wedge\vec{M_1M_2}$

مثال: أوجد معادلة مستوي بالنقطتين $M_1(1,-1,-2)$ $M_2(0,1,2)$

ويوازي المتجه $\vec{AB}(1,-3,2)$

الحل:

$\vec{M_1M_2}(-1,2,4)$

$$\vec{w}=\vec{AB}\wedge\vec{M_1M_2}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}=-16i-6j-k$$

$\vec{w}(-16,-6,-1)$

معادلة المستوي هي:

$-16X-6Y-Z+8=0$

نقطة تقاطع المستوي مع المحاور الإحداثية:

لكن لدينا المستوي:

$P: aX+bY+cZ+d=0$

تقاطع P مع المحور X عندما $y=0$ ، $z=0$

$aX=-d \Rightarrow \boxed{X=-\frac{d}{a}=E}$

النقطة هي $A(E,0,0)$ أي $A(-\frac{d}{a},0,0)$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نقطة تقاطع P مع المحور oy عند $x=0$ و $z=0$

$by=-d \Rightarrow \boxed{y=-\frac{d}{b}=F}$

النقطة هي $B(0,-\frac{d}{b},0)$ أو $B(0,F,0)$

نقطة تقاطع P مع المحور oz عند $x=0$ ، $y=0$

$cz=-d \Rightarrow \boxed{z=-\frac{d}{c}=G}$

النقطة هي $c(0,0,-\frac{d}{c})$ أو $c(0,0,G)$

* نسمي E,F,G الأجزاء المقطوعة من المحاور الإحداثية :

$A(E,0,0)\ B(0,F,0)\ c(0,0,G)$

معادلة مستوي بدلالة الأجزاء المقطوعة من المحاور الإحداثية :

لتكن نقاط تقاطع P مع النقاط : $A(E,0,0)\ B(0,F,0)\ c(0,0,G)$

ثلاث نقاط لا تقع على استقامة واحدة وبالتالي معادلة المستوي المار بـ A و B و C :

النقطة $A(\vec{E}^{x_0}, 0^{y_0}, 0^{z_0})$ ؛ $(\vec{AB}, \vec{AC})$ الناظم هو عمود على

$$\vec{V}=\vec{AB}\wedge\vec{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -E & F & 0 \\ -E & 0 & G \end{vmatrix}=(FG)i+(EG)j+(EF)k$$

$$a(X-X_0)+b(Y-Y_0)+c(Z-Z_0)=0$$

$$FG(X-E)+EG(Y)+EF(Z)=0$$

$$FGX+EGY+EFZ-EFG=0$$

نقسم على EFG :

$$\frac{X}{E}+\frac{Y}{F}+\frac{Z}{G}-1=0$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$E = \frac{-d}{a} \quad F = \frac{-d}{b} \quad G = \frac{-d}{c}$$

مثال: أوجد معادلة مستوي يمر بالنقط الأمثلة المعطوية من المحاور:

$$A(2,0,0) \quad B(0,-4,0)$$

$$C(0,0,5)$$

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{-4} + \frac{z}{5} - 1 = 0$$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z