كلية العلوم

القسم : الفيزياء

السنة : الاولى

المادة : هندسة تحليلية

المحاضرة : الثالثة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

الجداء المختلط :

$$(\vec{U_1},\vec{U_2},\vec{U_3}) = (\vec{U_1}\times\vec{U_2})\times\vec{U_3}$$

عدد $\vec{U_1}\times\vec{U_3}$ =

ملاحظة : ينعدم الجداء المختلط إذا كانت الأشعة $\vec{U_1}$ و $\vec{U_2}$ و $\vec{U_3}$ واقعة في مستوٍ واحد (لأن الجداء المتجهي لمتجهين هو عمودي على مستويهما ومنه عمود على المتجه الثالث $\vec{U_3}$ وبالتالي الجداء السلمي يساوي الصفر)

تطبيقات الجداء المختلط :

يستخدم في حجم متوازي السطوح المنشأ على الأشعة $\vec{U_1}\vec{U_2}\vec{U_3}$

$$V = |(\vec{U_1},\vec{U_2},\vec{U_3})|$$

مثال : احسب حجم رباعي الوجوه V المبني على المتجهات :

$\vec{U_1}(X_1,Y_1,Z_1)$ $\vec{U_2}(X_2,Y_2,Z_2)$

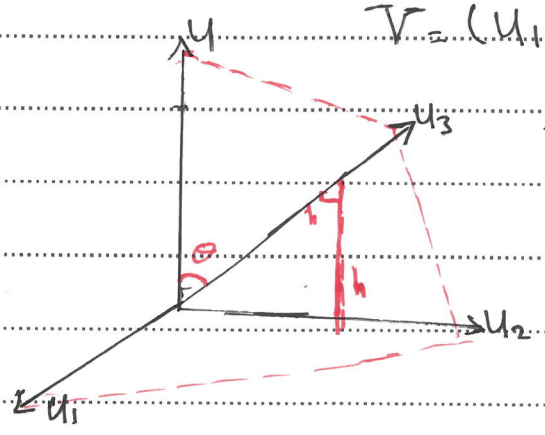
$\vec{U_3}(X_3,Y_3,Z_3)$

$$V = (\vec{U_1},\vec{U_2},\vec{U_3}) = (\vec{U_1}\times\vec{U_2})\cdot\vec{U_3}$$

$\vec{U}\perp\vec{U_1}\times\vec{U_2}$ عمود على مستوي $\vec{U_2},\vec{U_1}$

$$\vec{U}\cdot\vec{U_3} = |\vec{U}||\vec{U_3}|\cos\theta$$

$$V = \frac{1}{3}Sh$$

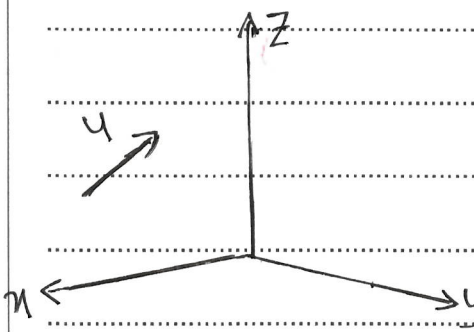


$$h = U_3\cos\theta$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} |u_1 \times u_2| \cdot u_3 \cos\theta$$

$$= \frac{1}{6} \cos\theta \, (u_1 . u_2 . u_3)$$

$$= \frac{1}{6} \cos\theta \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$



مثال: توجيه متجه (وسطاء التوجيه):

ليكن $\vec{u}(p,q,r)$ متجه في R^3 إن جميع المستقيمات أو المتجهات أو المحاور لهذا المتجه يكون لها نفس المنحى، أي أنه متجه يمين منحنى هذا الفضاء، عندئذٍ نسمي p,q,r أمثال توجيه المتجه (وسطاء التوجيه للمنحى)

نتيجة: أي متجهين متوازيان يمينان منحنى واحد.

فإذا كان: $\vec{u}(p,q,r)$ $\vec{u'}(p',q',r')$

$$\vec{u} = \lambda \vec{u'}$$

$$p = \lambda p' \quad q = \lambda q' \quad r = \lambda r'$$

$$\frac{p}{p'} = \frac{q}{q'} = \frac{r}{r'} = \lambda$$

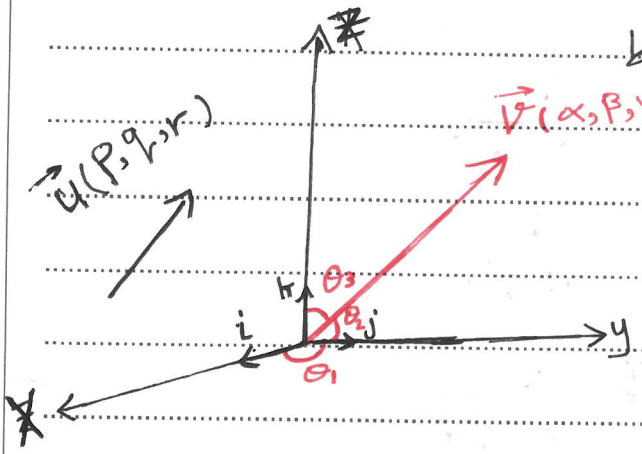
- إذا كانت أحد المركبات الموجودة في المقام معدومة فإن مقابلتها في البسط أيضاً معدومة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

جيوب تمام التوجيه:

ليكن $\vec{v}$ متجه واحدة (طويلته واحد) $\vec{v}(\alpha,\beta,\gamma)$

ولكن $\vec{u}(p,q,r)$ متجه متوازي بـ $\vec{v}$



لنفرض أن $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ هي الزوايا التي يصنعها المتجه $\vec{v}$ مع المحاور الإحداثية ox, oy و oz على الترتيب:

$$\vec{v}\cdot\vec{i} = |\vec{v}||\vec{i}|\cos\theta_1$$

$$\alpha = \cos\theta_1$$

$$\vec{v}\cdot\vec{j} = |\vec{v}||\vec{j}|\cos\theta_2$$

$$\beta = \cos\theta_2$$

$$\vec{v}\cdot\vec{k} = |\vec{v}||\vec{k}|\cos\theta_3$$

$$\gamma = \cos\theta_3$$

نسمي α, β, γ جيوب تمام التوجيه للمتجه $\vec{v}$ (للخط $\vec{u}$)

$$|\vec{v}| = 1 = \sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$$

بالتربيع:

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 1$$

العلاقة التي تربط جيوب تمام التوجيه للمتجه $\vec{v}$

$$\vec{u} = \lambda\vec{v}$$

$$p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k} = \lambda(\alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k})$$

بالمطابقة بين الطرفين

$$p = \lambda\alpha \quad q = \lambda\beta \quad r = \lambda\gamma$$

$$\frac{p}{\alpha} = \frac{q}{\beta} = \frac{r}{\gamma} = \lambda \quad \text{---} *$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$|u|^2 = \lambda |v|^2$$

$$p^2+q^2+r^2 = \lambda^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) \quad (=1)$$

$$\lambda = \sqrt{p^2+q^2+r^2}$$

* نعوض في ذي

$$\frac{p}{\alpha} = \sqrt{p^2+q^2+r} \Rightarrow \alpha = \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$$

$$\frac{q}{\beta} = \sqrt{p^2+q^2+r^2} \Rightarrow \beta = \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$$

$$\frac{r}{\gamma} = \sqrt{p^2+q^2+r^2} \Rightarrow \gamma = \frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$$

مثال: أوجد وسطاء توجيه ثم جيب توجيه المتجه المار بالنقطتين

$A(1,2,3)$ $B(3,2,1)$

الحل: $\overrightarrow{AB} = (2,0,-2)$

$p=2$ $q=0$ $r=-2$

وسطاء توجيه

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$$

$$\alpha = \frac{p}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\beta = \frac{q}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{0}{2\sqrt{2}} = 0$$

$$\gamma = \frac{r}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

AB

مركبات متجه واحدة $\alpha=\cos\theta_1$ $\beta=\cos\theta_2$

$\gamma=\cos\theta_3$

$\cos\theta_1=\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\cos\theta_2=\beta=0$

$\cos\theta_3=\gamma=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \vec{v}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

حالات خاصة:

1- منحى المحور $\vec{oX}$ هو $(P_3,0,0)$

متجه الواحدة $(1,0,0)$

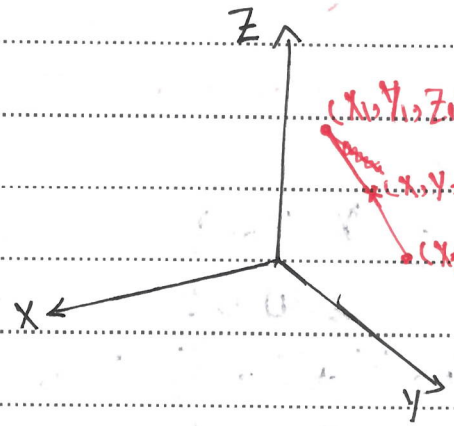
2- منحى المحور $\vec{oY}$ هو $(0,q,0)$

متجه الواحدة $(0,1,0)$

3- منحى المحور $\vec{oZ}$ هو $(0,0,r)$

متجه الواحدة $(0,0,1)$

- إحداثيات النقطة العاشرة لقطعة مستقيمة:



إذا كانت M تقسم القطعة [AB] بنسبة r

فإن $\vec{BM}=r\vec{BA}$

$\vec{Bo}+\vec{oM}=r(\vec{Bo}+\vec{oA})$

$(1-r)\vec{Bo}+\vec{oM}=r\,\vec{oA}$

$\vec{oM}=r\,\vec{oA}+(1-r)\vec{oB}$

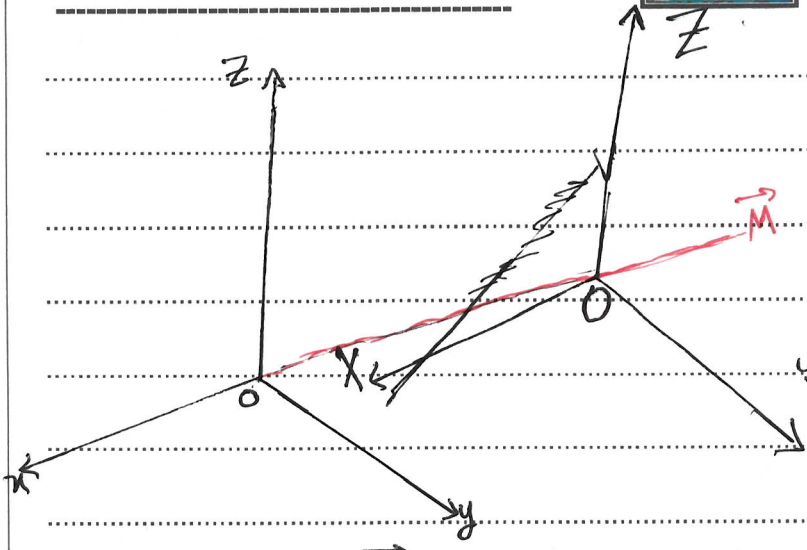
$(X,Y,Z)=r(X_A,Y_A,Z_A)+(1-r)(X_B,Y_B,Z_B)$

$X=rX_A+(1-r)X_B$

$Y=rY_A+(1-r)Y_B$

$Z=rZ_A+(1-r)Z_B$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة



تغيير جملة المحاور الإحداثية:

قد يكون شكل ما منسوب إلى جملة محاور (O,X,Y,Z) فحسب هذه الحالة الى جملة جديدة (O,X',Y',Z') فيصبح الشكل المنسوب الى جملة الجديدة

لنفرض (O,X',Y',Z') جملة جديدة

نبحث عن الجملة القديمة (O,X,Y,Z) بالحساب معين $\vec{OO'}$.

حيث $M(X',Y',Z')$ جملة جديدة $M(x,y,z)$ جملة قديمة

$\vec{OM} = \vec{OO'} + \vec{O'M}$ قديمة جديدة

احداثيات O' في جملة الإحداثيات القديمة (x_0,y_0,z_0) :

$$\begin{cases} x = x_0 + X' \\ y = y_0 + Y' \\ z = z_0 + Z' \end{cases}$$

هذه العلاقات تمثل العلاقات بين إحداثيات نقطة في الجملة القديمة إلى الجملة الحديثة

عين الانسحاب المناسب كي تحذف الحدود الخطية من المعادلة

$$x^2 + xy + 2x + y - 1 = 0$$

لدينا: $x = x_0 + X'$ و $y = y_0 + Y'$ و $z = z_0 + Z'$

نعوض في المعادلة:

$$(x_0+X')^2 + (x_0+X')(y_0+Y') + 2(x_0+X') + (y_0+Y') - 1 = 0$$

$$x_0^2 + 2x_0X' + X'^2 + x_0y_0 + x_0Y' + X'y_0 + X'Y' + 2x_0 + 2X' + y_0 + Y' - 1 = 0$$

$$= X'^2 + X'Y' + X'(2x_0 + y_0 + 2) + Y'(x_0 + 1) + x_0^2 + x_0y_0 + 2x_0 + y_0 - 1$$

كي تحذف الحدود الخطية (المعادلات معدومة) !

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

أيضاً: $2x_0+y_0+2=0$ ---(1)

$x_0+1=0$ ---(2)

من (2) $x_0=-1 \Rightarrow y_0=0$

المعادلة في الجملة الجديدة

$X^2+XY+1-1-1=0$

$X^2+XY-1=0$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة