



كلية العلوم

القسم : الفيزياء

السنة : الثانية

المادة : توابع خاصة

المحاضرة : الاولى / نظري / د. علي أسد

{{ مكتبة A to Z }}

مكتبة A to Z : Facebook Group

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

مقرر: التوابع الخاصة

المحاضرة: الأولى

د. علي أسد



جامعة طرطوس

كلية العلوم

قسم الفيزياء

تابع غاما

Gamma Function

يعتبر تابع غاما تعميماً للعامل $n!$ وبالتالي توجد تطبيقات كثيرة في الفيزياء تستخدم هذا التابع، على سبيل المثال التوزيعات الاحتمالية، يعطى التعريف الأساسي لتابع غاما بالشكل الآتي:

$$\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{n-1} dt, \quad n > 0 \quad n \in R$$

❖ بعض خواص تابع غاما:

$$\Gamma(1) = 1 \quad (1)$$

الإثبات: من التعريف نجد:

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^{+\infty} = 1$$

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) \quad (2)$$

الإثبات: من التعريف لدينا:

$$\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{n-1} dt, \quad n > 0$$

إذاً يكون:

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^n dt, \quad n > 0$$

بإجراء عملية التكامل بالتجزئة نحصل على:

$$u = t^n \Rightarrow du = nt^{n-1}, \quad dv = e^{-t} \Rightarrow v = -e^{-t}$$

$$\Gamma(n+1) = -e^{-t}t^n]_0^{+\infty} + n \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{n-1}dt$$

$$\Rightarrow \Gamma(n+1) = n \Gamma(n)$$

ملاحظة: يمكن كتابة تابع غاما بالشكل الآتي:

$$\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n}$$

$$\Gamma(n+1) = n! \quad \forall n \in N \quad (3)$$

الإثبات: من الخاصية 2 لدينا:

$$\Gamma(n+1) = n \Gamma(n)$$

وبالتالي:

$$\begin{aligned} \Gamma(n) &= (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) = (n-1)(n-2)(n-3)\Gamma(n-3) \\ &= (n-1)(n-2)(n-3) \dots \dots \dots 3.2.1 = n! \end{aligned}$$

$$(4) \text{ من أجل } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ يكون:}$$

$$\frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(n+m)} = 2 \int_0^{\pi/2} \cos \theta^{2n-1} \sin \theta^{2m-1} d\theta$$

الإثبات: من تعريف تابع غاما:

$$\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{n-1}dt$$

نفرض $t = u^2$ وبالتالي: $dt = 2udu$

$$\Gamma(n) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} u^{2(n-1)} u du$$

$$= 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} u^{2n-1} du$$

وبالمثل نجد من أجل $m > 0$

$$\Gamma(m) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-v^2} v^{2m-1} dv$$

وبذلك يكون:

$$\Gamma(n)\Gamma(m) = 4 \int_0^{+\infty} e^{-(u^2+v^2)} u^{2n-1} v^{2m-1} du dv$$

وباستعمال الإحداثيات القطبية:

$$u = r \cos \theta, \quad v = r \sin \theta, \quad u^2 + v^2 = r^2, \quad 0 < r < +\infty, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

بالتعويض نجد:

$$\begin{aligned} \Gamma(n)\Gamma(m) &= 4 \int_0^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2} r^{2n+2m-2} r dr \cos \theta^{2n-1} \sin \theta^{2m-1} d\theta \\ &= \left[\int_0^{+\infty} r^{2(n+m-1)} 2r e^{-r^2} dr \right] \times 2 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta^{2n-1} \sin \theta^{2m-1} d\theta \right] \end{aligned}$$

في التكامل الأول نفرض $r^2 = w$ فنحصل على:

$$\Gamma(n)\Gamma(m) = \underbrace{\left[\int_0^{+\infty} w^{n+m-1} e^{-w} dw \right]}_{\Gamma(n+m)} \times 2 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta^{2n-1} \sin \theta^{2m-1} d\theta \right]$$

وبذلك نحصل من العلاقة أعلاه على:

$$\frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(n+m)} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta^{2n-1} \sin \theta^{2m-1} d\theta$$

أمثلة:

مثال (1): أثبت أن $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

الحل: من الخاصية 4 يكون:

$$\frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(n+m)} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta^{2n-1} \sin \theta^{2m-1} d\theta$$

بوضع $n = m = \frac{1}{2}$ في العلاقة أعلاه نحصل على:

$$\frac{\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2}{\Gamma(1)} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta$$

$$\Rightarrow \left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right)^2 = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi \Rightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

مثال (2): أثبت أن:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\ln x}} = \sqrt{\pi}$$

الحل: نفرض أن $t = -\ln x$ وبالتالي $t = \ln \frac{1}{x}$ وبذلك يكون:

$$e^t = \frac{1}{x} \Rightarrow x = e^{-t} \Rightarrow dx = -e^{-t} dt$$

حدود التكامل: عندما $x \rightarrow 0$ فإن $t \rightarrow +\infty$ و عندما $x \rightarrow 1$ فإن $t \rightarrow 0$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\ln x}} = - \int_{+\infty}^0 e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

مثال (3): احسب قيمة:

$$\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{2}} = -2\sqrt{\pi} \quad (2)$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \times \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \quad (3)$$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{8}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} = \frac{\frac{5}{3} \times \frac{2}{3} \times \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} = \frac{10}{9} \quad (4)$$

تابع بيتا

Beta Function

يعرف تابع بيتا بالصيغة الآتية:

$$\beta(m, n) = \int_0^1 t^{m-1} (1-t)^{n-1} dt, \quad m, n \in R, m > 0, n > 0$$

❖ خواص تابع بيتا:

(1) التابع بيتا هو تابع متماثل:

$$\beta(m, n) = \beta(n, m), \quad m > 0, n > 0$$

الإثبات: من تعريف تابع بيتا:

$$\beta(m, n) = \int_0^1 t^{m-1} (1-t)^{n-1} dt$$

بفرض أن $u = 1 - t$ إذاً يكون $dt = -du$ ، نغير حدود التكامل: عندما $t \rightarrow 0$ فإن $u \rightarrow 1$ وعندما $t \rightarrow 1$ فإن $u \rightarrow 0$ ، وبذلك نحصل:

$$\beta(m, n) = - \int_1^0 (1-u)^{m-1} u^{n-1} dt = \beta(n, m)$$

(2) لدينا الخاصية الآتية:

$$\beta(m, n) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta^{2m-1} \sin \theta^{2n-1} d\theta$$

الإثبات: من تعريف تابع بيتا:

$$\beta(m, n) = \int_0^1 t^{m-1} (1-t)^{n-1} dt$$

نفرض أن $t = \cos^2 \theta$ فإن $dt = -2 \cos \theta \sin \theta d\theta$ ، وحدود التكامل عندما $t \rightarrow 0$ فإن $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ وعندما $t \rightarrow 1$ فإن $\theta \rightarrow 0$ ، وبذلك نحصل على:

$$\begin{aligned}\beta(m, n) &= -2 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos \theta^{2m-2} \sin \theta^{2n-2} \cos \theta \sin \theta \, d\theta \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta^{2m-1} \sin \theta^{2n-1} \, d\theta\end{aligned}$$

(3) الخاصية الآتية توضح العلاقة بين تابع غاما وتابع بيتا:

$$\beta(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

الإثبات: من الخاصية 2 لدينا:

$$\beta(m, n) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta^{2m-1} \sin \theta^{2n-1} \, d\theta \quad (1)$$

وباستعمال الخاصية 4 من خواص تابع غاما أي:

$$\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta^{2m-1} \sin \theta^{2n-1} \, d\theta \quad (2)$$

نلاحظ أن الطرف الأيمن من العلاقة (1) يساوي الطرف الأيمن من العلاقة (2) وبذلك يكون:

$$\beta(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

(4) لدينا الخاصية الآتية:

$$\beta(m, 1-m) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{m-1}}{u+1} \, du$$

الإثبات: من تعريف تابع بيتا

$$\beta(m, n) = \int_0^1 t^{m-1} (1-t)^{n-1} \, dt$$

نفرض أن: $u = \frac{t}{1-t}$ وبذلك يكون $t = \frac{u}{u+1}$ ، إذًا: $dt = \frac{du}{(u+1)^2}$ وحدود التكامل: عندما $t \rightarrow 0$ فإن $u \rightarrow 0$ وعندما $t \rightarrow 1$ فإن $u \rightarrow +\infty$ ، وبذلك نحصل:

$$\beta(m, 1-m) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{m-1}}{(u+1)^{m-1}} \frac{1}{(u+1)^{-m}} \frac{du}{(u+1)^2}$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{u^{m-1}}{u+1} du$$

قاعدة لحساب بعض التكاملات

$$\int_0^{+\infty} \frac{u^{m-1}}{u+1} du = \Gamma(m)\Gamma(1-m) = \frac{\pi}{\sin m\pi}$$

تمارين: احسب التكاملات الآتية:

$$\int_0^{\infty} x^3 e^{-x} dx \quad (1)$$

$$\int_0^{\infty} x^6 e^{-2x} dx \quad (2)$$

$$\int_0^{\infty} \sqrt{y} e^{-y^3} dy \quad (3)$$

$$\int_0^{\infty} x^m e^{-ax^n} dx \quad a > 0 \quad (4)$$

$$\int_0^{\pi} \cos^4 \theta d\theta \quad (5)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \theta \cos^5 \theta d\theta \quad (6)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 \theta d\theta \quad (7)$$

$$\int_0^{\infty} t^{-\frac{3}{2}} (1 - e^{-t}) dt \quad (8)$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^3}} \quad (9)$$

$$\int_0^1 x(1-x^3)^{\frac{1}{3}} dx \quad (10)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan \theta} d\theta \quad (11)$$

$$\int_{-1}^1 \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{1/2} dx \quad (12)$$

الحل:

$$\int_0^{\infty} x^3 e^{-x} dx = \Gamma(3+1) = 3! = 6$$

$$\int_0^{\infty} x^6 e^{-2x} dx$$

نفرض: $x^6 = \frac{u^6}{64}$, $2x = u \Rightarrow du = 2 dx$ (تبقى حدود التكامل نفسها)

$$\int_0^{\infty} x^6 e^{-2x} dx = \frac{1}{128} \int_0^{\infty} u^6 e^{-u} du = \frac{1}{128} \Gamma(6+1) = \frac{6!}{128} = \frac{45}{8}$$

$$\int_0^{\infty} \sqrt{y} e^{-y^3} dy$$

نغير المتحول:

$$y^3 = u \Rightarrow y = u^{1/3} \Rightarrow dy = \frac{1}{3} u^{-2/3} du, \sqrt{y} = u^{1/6}$$

$$\int_0^{\infty} \sqrt{y} e^{-y^3} dy = \int_0^{\infty} u^{1/6} e^{-u} \frac{1}{3} u^{-2/3} du = \frac{1}{3} \int_0^{\infty} u^{-1/2} e^{-u} du$$

$$= \frac{1}{3} \Gamma\left(-\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{3} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{3}$$

$$\int_0^{\infty} x^m e^{-ax^n} dx \quad a > 0$$

$$ax^n = u \Rightarrow x^n = \frac{1}{a} u \Rightarrow x = a^{-\frac{1}{n}} u^{\frac{1}{n}}, \quad x^m = a^{-\frac{m}{n}} u^{\frac{m}{n}}, \quad dx = \frac{1}{n} a^{-\frac{1}{n}} u^{\frac{1-n}{n}} du$$

$$\int_0^{\infty} x^m e^{-ax^n} dx = \frac{1}{n} a^{-\frac{m+1}{n}} \int_0^{\infty} u^{\frac{m-n+1}{n}} e^{-u} du$$

$$= \frac{1}{n} a^{-\frac{m+1}{n}} \Gamma\left(\frac{m-n+1}{n} + 1\right) = \frac{1}{n} a^{-\frac{m+1}{n}} \Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)$$

$$\int_0^{\pi} \cos^4 \theta d\theta$$

$$2m - 1 = 4 \Rightarrow m = \frac{5}{2}, \quad 2n - 1 = 0 \Rightarrow n = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^{\pi} \cos^4 \theta d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(3)} = \frac{\frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \pi}{2} = \frac{3\pi}{8}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \theta \cos^5 \theta d\theta$$

$$2n - 1 = 4 \Rightarrow n = \frac{5}{2}, \quad 2m - 1 = 5 \Rightarrow m = 3$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \theta \cos^5 \theta d\theta = \frac{1}{2} \beta(n, m) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \Gamma(3)}{\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \Gamma(3)}{\frac{9}{2} \times \frac{7}{2} \times \frac{5}{2} \times \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} = \frac{8}{315}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 \theta d\theta$$

$$2n - 1 = 6 \Rightarrow n = \frac{7}{2} \quad , \quad 2m - 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 \theta d\theta = \frac{1}{2} \beta(n, m) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{\Gamma(4)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{5}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \pi}{6} = \frac{5\pi}{32}$$

$$\int_0^{\infty} t^{-\frac{3}{2}} (1 - e^{-t}) dt$$

نكامل بالتجزئة:

$$u = 1 - e^{-t} \Rightarrow du = e^{-t} dt \quad , \quad dv = t^{-\frac{3}{2}} dt \Rightarrow v = -2t^{-\frac{1}{2}}$$

$$\int_0^{\infty} t^{-\frac{3}{2}} (1 - e^{-t}) dt = \left[-2(1 - e^{-t}) t^{-\frac{1}{2}} \right]_0^{\infty} + 2 \int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = 2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{\pi}$$