كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الثانية**

المادة : توابع خاصة

المحاضرة : الخامسة /نظري/د.علي أسد

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Z مكتبة

جامعة طرطوس		مقرر: التوابع الخاصة

كلية العلوم		المحاضرة: الخامسة

قسم الفيزياء		د. علي أسد

كثيرات حدود تشبيشيف

تعرف كثيرات حدود تشبيشيف من النوع الأول $T_n(x)$ كالآتي:

$$T_n(x) = \cos(ncos^{-1}(x)) \qquad n \geq 0 \ , |x| \leq 1 \qquad\qquad (1)$$

وكثيرات حدود تشبيشيف من النوع الثاني $U_n(x)$ كالآتي:

$$U_n(x) = \sin(ncos^{-1}(x)) \qquad n \geq 0 \qquad\qquad (2)$$

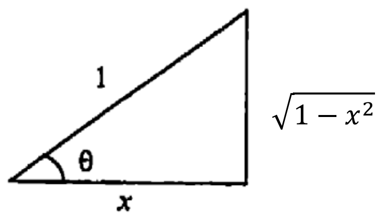
يمكن تعريف $T_n(x)$ بالصورة المركبة كالآتي:

افرض أن $\theta = cos^{-1}(x)$ وبالتالي $x = \cos\theta$، تصبح العلاقة (1) كالآتي:

$$T_n(x) = \cos(n\theta)$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{in\theta} + e^{-in\theta}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[(\cos\theta + isin\,\theta)^n + (\cos\theta - isin\,\theta)^n\right]$$



وعليه نجد:

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\left[\left(x + i\sqrt{1-x^2}\right)^n + \left(x - i\sqrt{1-x^2}\right)^n\right]$$

بالمثل يمكن كتابة $U_n(x)$ كالآتي:

$$U_n(x) = \sin(n\theta) = \frac{1}{2i}\left[e^{in\theta} - e^{-in\theta}\right] = \frac{1}{2i}\left[\left(x + i\sqrt{1-x^2}\right)^n - \left(x - i\sqrt{1-x^2}\right)^n\right]$$

مبرهنة(1): أثبت أن التابعين $T_n(x)$ و $U_n(x)$ يمثلان حلين مستقلين للمعادلة:

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + n^2y = 0$$

الإثبات: يجب أن نثبت أن كلاً من $T_n(x)$ و $U_n(x)$ يمثل حلاً للمعادلة:

$$T_n(x) = \cos(ncos^{-1}(x))$$

$$T'_n(x) = -\sin\left(ncos^{-1}(x)\right)\left(\frac{-n}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

وعليه نجد:

$$\sqrt{1-x^2}T'_n(x) = n\sin\left(ncos^{-1}(x)\right)$$

بالاشتقاق مرة ثانية نجد:

$$\sqrt{1-x^2}T''_n(x) + \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}T'_n(x) = n\cos\left(ncos^{-1}(x)\right)\left(\frac{-n}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

نضرب الطرفين بـ $\sqrt{1-x^2}$ فنجد:

$$(1-x^2)T''_n(x) - xT'_n(x) = -n^2\cos\left(ncos^{-1}(x)\right)$$

$$(1-x^2)T''_n(x) - xT'_n(x) + n^2T_n(x) = 0$$

بنفس الطريقة يمكن إثبات أن:

$$(1-x^2)U''_n(x) - xU'_n(x) + n^2U_n(x) = 0$$

الدالة المولدة لحدوديات تشبيشيف:

$$\frac{1-t^2}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = T_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} t^n\, T_n(x) \quad -1 \le x \le 1 \qquad (3)$$

$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} U_{n+1}(x)t^n \quad -1 \le x \le 1 \qquad (4)$$

مبرهنة (2): علاقة التعامد:

$$\int_{-1}^{+1}\frac{T_m(x)T_n(x)dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} 0 & m \ne n \\ \frac{\pi}{2} & m = n \ne 0 \\ \pi & m = n = 0 \end{cases} \qquad (5)$$

الإثبات:

نضع $m = n = 0$ في العلاقة (5)

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\left[sinx^{-1}\right]_{-1}^{+1}=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi$$

في الحالة العامة نفرض أن $x=\cos\theta$ فنجد أن

$$\int_{-1}^{+1}\frac{T_m(x)T_n(x)dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_{\pi}^{0}\frac{T_m(\cos\theta)T_n(\cos\theta)}{\sin\theta}(-\sin\theta\,d\theta)$$

$$=\int_0^{\pi}\cos(m\theta)\cos(n\theta)\,d\theta$$

وعليه نحصل على:

$$\int_{-1}^{+1}\frac{T_m(x)T_n(x)dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}[\cos(m\theta+n\theta)+\cos(m\theta-n\theta)]\,d\theta$$

ندرس الحالات الآتية:

- $m=n\neq 0$

$$\int_{-1}^{+1}\frac{T_n^2(x)dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos 2\theta)\ d\theta=\frac{\pi}{2}$$

- $m\neq n$

$$\int_{-1}^{+1}\frac{T_m(x)T_n(x)dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)\theta}{m+n}+\frac{\sin(m-n)\theta}{m-n}\right]_0^{\pi}=0$$

<u>مبرهنة (3):</u> العلاقات التكرارية:

$$T_{m+n}(x)-2T_m(x)T_n(x)+T_{|n-m|}(x)=0 \qquad (6)$$

$$(1-x^2)T'_n(x)=-nxT_n(x)+nT_{n-1}(x) \qquad (7)$$

<u>الإثبات:</u> بوضع $x=\cos\theta$ يكون لدينا:

$$T_{m+n}(x)+T_{|n-m|}(x)=\cos[(m+n)\theta]+\cos[(n-m)\theta]$$

$$=2\cos m\,\theta\cos n\theta=2T_m(x)T_n(x)$$

وبذلك نثبت العلاقة (6)

بوضع $x=\cos\theta$ يكون لدينا:

$$(1-x^2)T'_n(x) = (1-x^2)\frac{dT_n(x)}{dx} = (1-\cos\theta^2)\frac{d}{d(\cos\theta)}\cos n\,\theta$$

$$= \sin\theta^2\left(-\frac{1}{\sin\theta}\right)(-nsin\,n\theta) = n\sin\theta\; sin\,n\theta$$

أما

$$-nxT_n(x) + nT_{n-1}(x) = ncos(n-1)\theta - ncos\theta\cos n\theta$$

$$= n\sin\theta\; sin\,n\theta$$

وعليه فإن:

$$(1-x^2)T'_n(x) = -nxT_n(x) + nT_{n-1}(x)$$

مثال : أثبت أن:

$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

الإثبات: نستخدم العلاقة:

$$T_{m+n}(x) - 2T_m(x)T_n(x) + T_{|n-m|}(x) = 0$$

نضع $m = n = 1$

$$T_2(x) - 2T_1(x)T_1(x) + T_0(x) = 0$$

$$T_0(x) = 1 \quad , \quad T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

نضع $m = 1, n = 2$

$$T_3(x) - 2T_1(x)T_2(x) + T_1(x) = 0$$

$$T_3(x) = 2x(2x^2-1) - x$$

$$= 4x^3 - 3x$$

نضع $m = 1, n = 3$

$$T_4(x) - 2T_1(x)T_3(x) + T_2(x) = 0$$

$$T_4(x) = 2x(4x^3-3x) - 2x^2 + 1$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

نضع $m = 1, n = 4$

$$T_5(x) - 2T_1(x)T_4(x) + T_3(x) = 0$$

$$T_5(x) = 2x(8x^4 - 8x^2 + 1) - (4x^3 - 3x)$$

$$= 16x^5 - 16x^3 + 2x - 4x^3 + 3x$$

$$= 16x^5 - 20x^3 + 5x$$