كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الثانية**

المادة : توابع خاصة

المحاضرة : السادسة /نظري/د.علي أسد

{{ A to Z مكتبة }}

# معادلة وكثيرات حدود هرميت

تعطى معادلة هرميت بالشكل الآتي:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2ny = 0 \quad , x \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

وتكتب أيضاً بالشكل:

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x^2}\frac{dy}{dx}\right) + ne^{-x^2}y = 0 \quad , \quad x \in \mathbb{R} \qquad (2)$$

تعطى كثيرات حدود هرميت بالشكل الآتي:

$$H_n(x) = \sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^r \frac{n!}{r!\,(n-2r)!}(2x)^{n-2r} \qquad (3)$$

لاحظ أن:

$$H_0(x) = 1\,, \quad H_1(x) = 2x\,, \qquad H_2(x) = 4x^2 - 2\,, \qquad H_3(x) = 8x^3 - 12x$$

$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12\,, \qquad H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x$$

❖ **الدالة المولدة لكثيرات حدود هرميت:**

تعطى الدالة المولدة لكثيرات حدود هرميت بالشكل الآتي:

$$e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x) \qquad (4)$$

**الإثبات:**

$$e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x) = H_0(x) + H_1(x)t + \frac{H_2(x)t^2}{2!} + \frac{H_3(x)t^3}{3!} + \cdots$$

$$e^{2xt-t^2} = 1 + 2xt - t^2 + \frac{(2xt-t^2)^2}{2!} + \frac{(2xt-t^2)^3}{3!} + \cdots$$

$$= 1 + 2xt - t^2 + 2x^2t^2 - 2xt^3 + \frac{t^4}{2} + \frac{8x^3t^3}{6} - \frac{12x^2t^4}{6} + \frac{6xt^5}{6} - \frac{t^6}{6}$$

بمقارنة الأمثال في الطرفين نجد:

$$H_0(x) = 1,\ \ H_1(x) = 2x\ , \qquad H_2(x) = \ 4x^2 - 2\ ,\ \ H_3(x) = 8x^3 - 12x$$

وهو المطلوب.

### ❖ صيغة رودريج لكثيرات حدود هرميت:

تعطى صيغة رودريج بالشكل الآتي:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \quad (5)$$

يمكن الحصول على الحدود الأولى من صيغة رودريج كالآتي:

$$n = 0\ \Rightarrow\ \ H_0(x) = 1$$

$$n = 1\ \Rightarrow\ H_1(x) = 2x$$

$$n = 2\ \Rightarrow\ H_2(x) = \ 4x^2 - 2$$

$$n = 3\ \Rightarrow\ H_3(x) = 8x^3 - 12x$$

### ❖ العلاقات التكرارية لكثيرات حدود هرميت:

1. $H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x)\ \ \ n \geq 1,\ \ H_0'(x) = 0$

**<u>الإثبات:</u>**

$$e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x)$$

نفاضل الطرفين بالنسبة لـ $x$ فنجد:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n'(x) = 2te^{2xt-t^2} = 2t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x)$$

وعليه نحصل على العلاقة:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n'(x) = 2t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n'(x) \frac{t^n}{n!} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^{n+1}}{n!}$$

$$H_0'(x) + H_1'(x)t + H_2'(x)\frac{t^2}{2!} + \cdots = 2H_0(x)t + 2H_1(x)\frac{t^2}{1!} + 2H_2(x)\frac{t^3}{2!} + \cdots$$

بطابقة أمثال $t^n$ للطرفين نجد أن:

$$H_0'(x) = 0$$

$$H_1'(x) = 2H_0(x)$$

$$H_2'(x)\frac{1}{2!} = 2H_1(x)\frac{1}{1!}$$

$$\vdots$$

$$H_n'(x)\frac{1}{n!} = 2H_{n-1}(x)\frac{1}{(n-1)!} \quad \forall n > 0$$

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x)$$

2. $H_{n+1}(x) = 2nH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \;\; ; \;\; H_1(x) = 2xH_0(x)$

**الإثبات:**

$$e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x)$$

نفاضل الطرفين بالنسبة لـ $t$

$$(2x-2t)e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nt^{n-1}}{n!} H_n(x)$$

والتي تكتب بالشكل:

$$2(x-t)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nt^{n-1}}{n!} H_n(x)$$

ومنها نجد:

$$2x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x) - 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n!} H_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} H_n(x)$$

بمطابقة أمثال $t^0$ في طرفي المعادلة نجد:

$$2xH_0(x) = H_1(x)$$

$$2x\frac{H_n(x)}{n!} - 2\frac{H_{n-1}(x)}{(n-1)!} = \frac{H_{n+1}(x)}{n!}$$

ومنها نجد أن:

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$$

### ❖ خاصية التعامد والاستنظام:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_m(x)H_n(x)dx = \begin{cases} 0 & , \; m \neq n \\ 2^n \, n! \, \sqrt{\pi} & , \; m = n \end{cases}$$

**الإثبات:**

$$e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x) \qquad , \quad e^{2xs-s^2} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{s^m}{m!} H_m(x)$$

بضرب الطرفين نجد:

$$e^{2xt-t^2} \,.\, e^{2xs-s^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{s^m}{m!} H_m(x)$$

نضرب الطرفين بـ $e^{-x^2}$

$$e^{-x^2} e^{2xt-t^2} \,.\, e^{2xs-s^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-x^2} \frac{H_n(x) t^n}{n!} \frac{H_m(x) s^m}{m!}$$

نأخذ تكامل الطرفين:

$$e^{-(t^2+s^2)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+2tx+2sx} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \frac{H_n(x) t^n}{n!} \frac{H_m(x) s^m}{m!} dx$$

التكامل في الطرف الأول:

$$e^{-(t^2+s^2)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+2tx+2sx} dx = e^{-(t^2+s^2)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+2(t+s)x} dx$$

$$= e^{-(t^2+s^2)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+2(t+s)x+(t+s)^2-(t+s)^2} dx$$

$$= e^{-(t^2+s^2)} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-[x-(s+t)]^2 + (t+s)^2\}\, dx$$

$$= e^{2st} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-[x-(s+t)]^2\}\, dx$$

بالتعويض عن $u = x - (s+t)$

$$= e^{2st} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} dx$$

وحيث أن:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} dx = \sqrt{\pi} \quad , \qquad e^{2st} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n s^n t^n}{n!}$$

وعليه نجد:

$$e^{-(t^2+s^2)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+2tx+2sx} dx = \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n s^n t^n}{n!}$$

وبالتالي:

$$\sqrt{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n s^n t^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^n s^m}{n!\,m!}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}H_n(x)H_m(x)\,dx$$

عندما $n=m$:

$$\sqrt{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}2^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}H_n(x)H_n(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}[H_n(x)]^2\,dx=\sqrt{\pi}2^n n!$$

**إثبات شرط التعامد:**

بما أن كثيرات حدود هرميت هو حل لمعادلة هرميت نكتب المعادلة بالشكل:

$$H_n''(x)-2xH_n'(x)+2nH_n(x)=0$$

$$H_m''(x)-2xH_m'(x)+2mH_m(x)=0$$

نضرب كل معادلة بكثير حدود المعادلة الأخرى ونطرح:

$$[H_m(x)H_n''(x)-H_n(x)H_m''(x)]+[2xH_n(x)H_m'(x)-2xH_m(x)H_n'(x)]+[2nH_n(x)H_m(x)-2mH_m(x)H_n(x)]=0$$

نكتب المعادلة بالشكل الآتي:

$$\frac{d}{dx}[H_m(x)H_n'(x)-H_n(x)H_m'(x)]+2x[H_n(x)H_m'(x)-H_m(x)H_n'(x)]=(m-n)2H_n(x)H_m(x)=0$$

نضرب كل الأطراف بالمعامل $e^{-x^2}$ ونعيد الترتيب بحيث نحصل على حد واحد في الطرف الأيسر بدلاً من حدين فنجد:

$$e^{-x^2}\frac{d}{dx}[H_m(x)H_n'(x)-H_n(x)H_m'(x)]+2xe^{-x^2}[H_n(x)H_m'(x)-H_m(x)H_n'(x)]=e^{-x^2}(m-n)2H_n(x)H_m(x)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}de^{-x^2}[H_m(x)H_n'(x)-H_n(x)H_m'(x)]=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}(m-n)2H_n(x)H_m(x)dx$$

نكامل الطرفين فنجد:

$$e^{-x^2}[H_m(x)H_n'(x)-H_n(x)H_m'(x)]\Big|_{-\infty}^{+\infty}=2(m-n)\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}H_n(x)H_m(x)dx$$

$$2(m-n)\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}H_n(x)H_m(x)dx=0$$

$$2(m-n)\neq 0\ \Rightarrow\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}H_n(x)H_m(x)dx=0$$