كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الثانية**

المادة : اهتزازات وامواج

المحاضرة : الرابعة/نظري/دكتورة

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Zمكتبة

تركيب حركتين متعامدتين لهما التواتر نفسه:

تُوصف الحركتان التوافقيتان المركبتان للحركة المحصلة باختيار مناسب للحظة البدء $t = 0$ بالعلاقتين:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= A_1 \cos(wt) \\ y(t) &= A_2 \cos(wt+\varphi) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

φ : فرق الطور البدئي .

نحصل على معادلة المسار للحركة المركبة في المستوي oxy بحذف الزمن t.

تُكتب العلاقتين (1) بالشكل التالي:

$$\frac{x}{A_1} = \cos(wt)$$

$$\frac{y}{A_2} = \cos(wt)\cos(\varphi) - \sin(wt)\sin(\varphi)$$

$$\Rightarrow \frac{y}{A_2} = \frac{x}{A_1}\cos(\varphi) - \sin(wt)\sin(\varphi) \ \Rightarrow \ \frac{x}{A_1}\cos(\varphi) - \frac{y}{A_2} = \sin(wt)\sin(\varphi) \qquad (*)$$

وبتربيع الطرفين وإجراء بعض الإصلاحات بعد تبديل $\sin^2(\mathrm{wt})$ بما يساويها من العلاقة الأولى:

$$\sin^2(\mathrm{wt}) = 1 - \cos^2(\mathrm{wt}) = 1 - \left(\frac{x}{A_1}\right)^2 \qquad (**)$$

نحصل على العلاقة التالية:

$$\left(\frac{x}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{A_2}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{A_1}\right)\left(\frac{y}{A_2}\right)\cos(\varphi) - \sin^2(\varphi) = 0 \qquad (2)$$

التي تمثل بشكل عام معادلة قطع ناقص تتعين خواصه بقيمة زاوية فرق الطور φ .

إنَّ شكل الحركة المركبة واتجاه الحركة موضح بالشكل التالي، وذلك من أجل قيم مختلفة لزاوية فرق الطور φ **هي:**

a) $\varphi = 0,2\pi$ في هذه الحالة تأخذ العلاقة (2) الصيغة التالية:

$$\left(\frac{x}{A_1} - \frac{y}{A_2}\right)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \left(\frac{A_2}{A_1}\right)x \qquad (3)$$

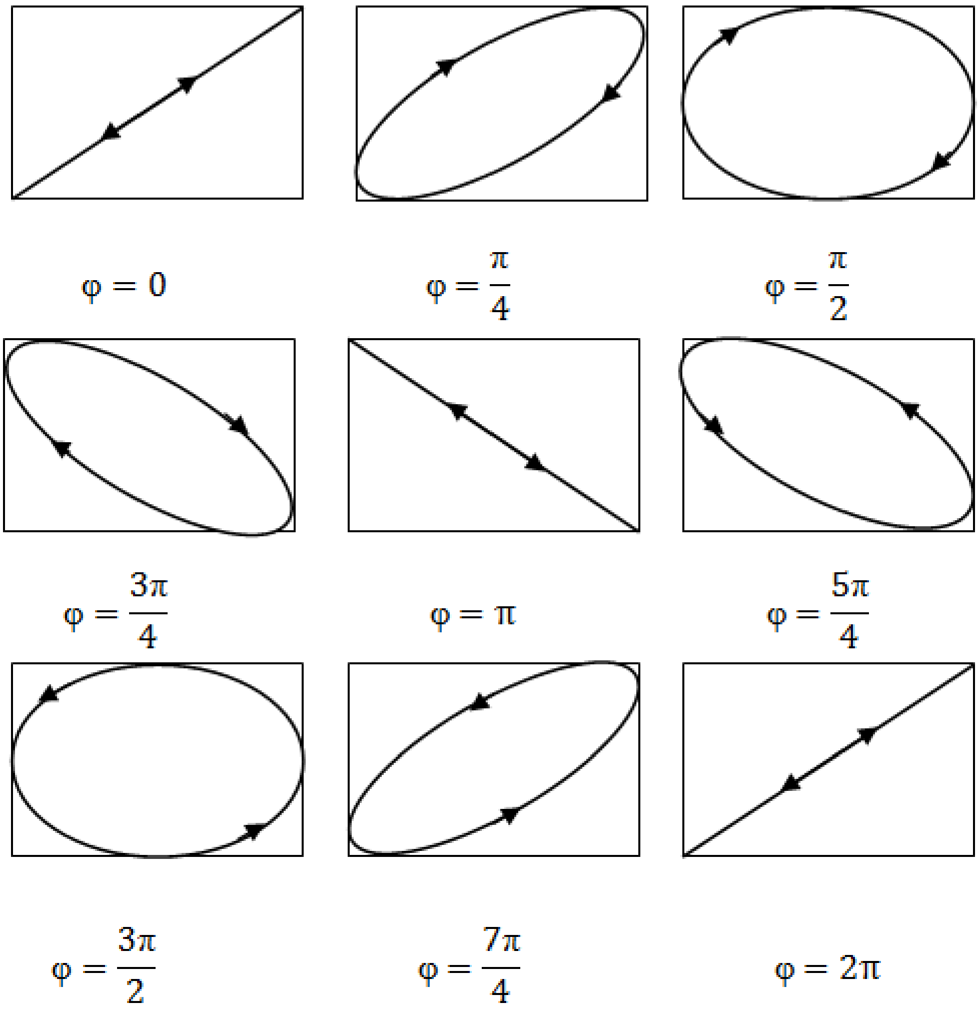
والحركة المركبة هي مستقيم ينطبق على قطر المستطيل المحدد للحركة بشكل عام والي يمر من الربع الأول والثالث للدائرة المثلثية.

تكون الحركة المحصلة في هذه الحالة حركة مستقيمة ويتحدد وضع النقطة المادية على هذا المستقيم بالبعد $s(t)$ الذي يمثل إحداثي هذه الجملة على المستقيم المعرف بالعلاقة (3)، حيث:

$$s(t) = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}\cos(wt) \qquad (4)$$

أي أنَّ الحركة المركبة في هذه الحالة تمثل حركة توافقية بسيطة أيضاً لها التواتر الزاوي w نفسه وسعتها $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$.

تصادف هذه الحالة في الاهتزازات الكهرطيسية وتعطي مفهوماً للضوء المستقطب خطياً.



الشكل (1)

b) $\varphi = \pi$ في هذه الحالة نحصل على حركة مركبة تجري وفقاً للمستقيم $y = -\left(\frac{A_2}{A_1}\right)x$ المنطبق على قطر المستطيل المار من الربع الثاني والرابع للدائرة المثلثية، وهي تأخذ شكل حركة توافقية بسيطة أيضاً ذات تواتر زاوي w وسعة $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$.

c) $\varphi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ في هاتين الحالتين تأخذ العلاقة (2) الصيغة التالية:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1 \qquad (5)$$

وهي معادلة قطع ناقص تنطبق محاوره على المحورين ox,oy ، أمّا جهة الحركة على هذا القطع فتتعين بواسطة الإنشاء الهندسي للمسار، حيث نحدد وضع النقطة P الممثلة للجملة المادية في المستوي oxy في لحظات زمنية متتالية.

إنَّ تطبيق هذه الطريقة يقود إلى معرفة اتجاه الحركة على القطع الناقص فإذا كانت $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ، فتأخذ معادلتي القطع الوسيطتين الشكل التالي:

$$x(t) = A_1 \cos(wt)$$

$$y(t) = A_2 \cos(wt + \frac{\pi}{2}) = -A_2 \sin wt$$

ففي اللحظة $t = 0$ تكن النقطة p معرّفة بالإحداثيين $x = A_1$ و $t = 0$ أي تكون واقعة في الربع الأول وفي لحظة تالية تختلف عن الأولى بفاصل زمني $\Delta t < \frac{T}{4}$ تصبح النقطة p في الربع الرابع لأن إحداثيها x يكون موجب بينما y يكون سالب في هذه اللحظة، ومنه نجد أنَّ حركة النقطة p من الوضع الأول إلى الثاني تتجه من الربع الأول إلى الرابع أي مع جهة دوران عقارب الساعة. وبنفس الطريقة يمكننا استنتاج أنَّ جهة الحركة عندما $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ تكون معاكسة لجهة دوران عقارب الساعة. وفي الحالة الخاصة التي يكون فيها $A_1 = A_2$ فإنَّ مسار الحركة المركبة يأخذ شكل دائرة بينما لا تتغير جهة الدوران عليه.

d) $\varphi = \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ يبين الإنشاء الهندسي أنَّ شكل المسار يأخذ في هذه الحالة شكل قطع ناقص يقع مركزه في مبدأ الإحداثيات o، وينطبق أحد محوريه على المستقيم المعرّف بالعلاقة (3)، أمّا جهة الحركة عليه فتكون باتجاه عقارب الساعة عندما $\varphi = \frac{\pi}{4}$، وعكس اتجاه دوران عقارب الساعة عندما $\varphi = \frac{7\pi}{4}$، كما في الشكل (1).

e) $\varphi = \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ يأخذ المسار في هاتين الحالتين شكل قطع ناقص ينطبق أحد محوريه على المستقيم $y = -\left(\frac{A_2}{A_1}\right)x$ ومركزه يقع في مبدأ الإحداثيات أيضاً، أمّا جهة الحركة عليه فتكون باتجاه عقارب الساعة عندما $\varphi = \frac{3\pi}{4}$، وعكس اتجاه دوران عقارب الساعة عندما $\varphi = \frac{5\pi}{4}$، كما في الشكل (1).

من الفقرات السابقة نستنتج أنَّ الحركة المركبة تتعلق بشكل أساسي بفرق الطور φ ، فهي تكون حركة مستقيمة قطرية عندما $\varphi = 0$ بعامل انضغاط يساوي الواحد ثمّ تتحول إلى حركة على شكل قطع ناقص عندما $0 < \varphi < \pi$ ، أمّا شكل هذا القطع فيتغير بحيث يتناقص انضغاطه مع ازدياد φ ويبلغ قيمته الصغرى من أجل $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ليعود فيزداد مرة أخرى تدريجياً ويبلغ قيمته الواحد عندما $\varphi = \pi$ حيث يتحول القطع الناقص مرة أخرى إلى مستقيم مار من الربع الثاني والرابع.

تتحول الحركة المركبة مرة أخرى إلى حركة على شكل قطع ناقص من أجل $\pi < \varphi < 2\pi$ ويتغير شكل القطع بنفس السياق السابق حيث يتناقص انضغاطه تدريجياً من الواحد حتى يبلغ قيمته الصغرى عندما $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ ثم يزداد من جديد ويبلغ الواحد من أجل $\varphi = 2\pi$ حيث يأخذ من جديد شكل المستقيم المعرّف بالعلاقة (3).

أمّا جهة الحركة فهي موافقة لاتجاه دوران عقارب الساعة من أجل $0 < \varphi < \pi$ ومعاكسة لاتجاه دوران عقارب الساعة من أجل $\pi < \varphi < 2\pi$.

أيّ أنَّ الحركة المركبة من حركتين توافقيتين متعامدتين لهما التواتر الزاوي نفسه تمثل حركة على شكل قطع ناقص والعكس صحيح، فالحركة التي لها شكل قطع ناقص يمكن تحليلها إلى حركتين توافقيتين بسيطتين متعامدتين ذات تواتر واحد $w = \frac{2\pi}{T}$ حيث T تمثل هنا الزمن اللازم لكي يقوم المتحرك بدورة واحدة على القطع وسعتين مختلفتين، تساوي إحداهما نصف طول أحد ضلعي المستطيل الذي يرتسم القطع الناقص داخله بينما تساوي الأخرى نصف طول الضلع الآخر. أما زاوية فرق الطور بينهما فتتحدد تبعاً لوضع القطع واتجاه الحركة عليه.

نشير هنا إلى أنَّ الحركة الدائرية المنتظمة والتي يمكن تحليلها إلى حركتين توافقيتين بسيطتين متعامدتين، لهما تواتر زاوي واحد w مساوٍ للسرعة الزاوية المنتظمة للحركة الدائرية وسعة واحدة تساوي نصف قطر المسار الدائري وفرق الطور ثابت بينهما يساوي $\frac{\pi}{2}$ إذا كانت الحركة باتجاه دوران عقارب الساعة، ويساوي $\frac{3\pi}{2}$ إذا كانت الحركة معاكسة لاتجاه دوران عقارب الساعة.

تركيب حركتين متعامدتين لهما تواتران زاويان مختلفان، أشكال ليساجو:

تُعطى الحركتان التوافقيتان البسيطتان المركبتان في هذه الحالة بالعلاقتين:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= A_1 \cos(w_1 t) \\ y(t) &= A_2 \cos(w_2 t + \varphi) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

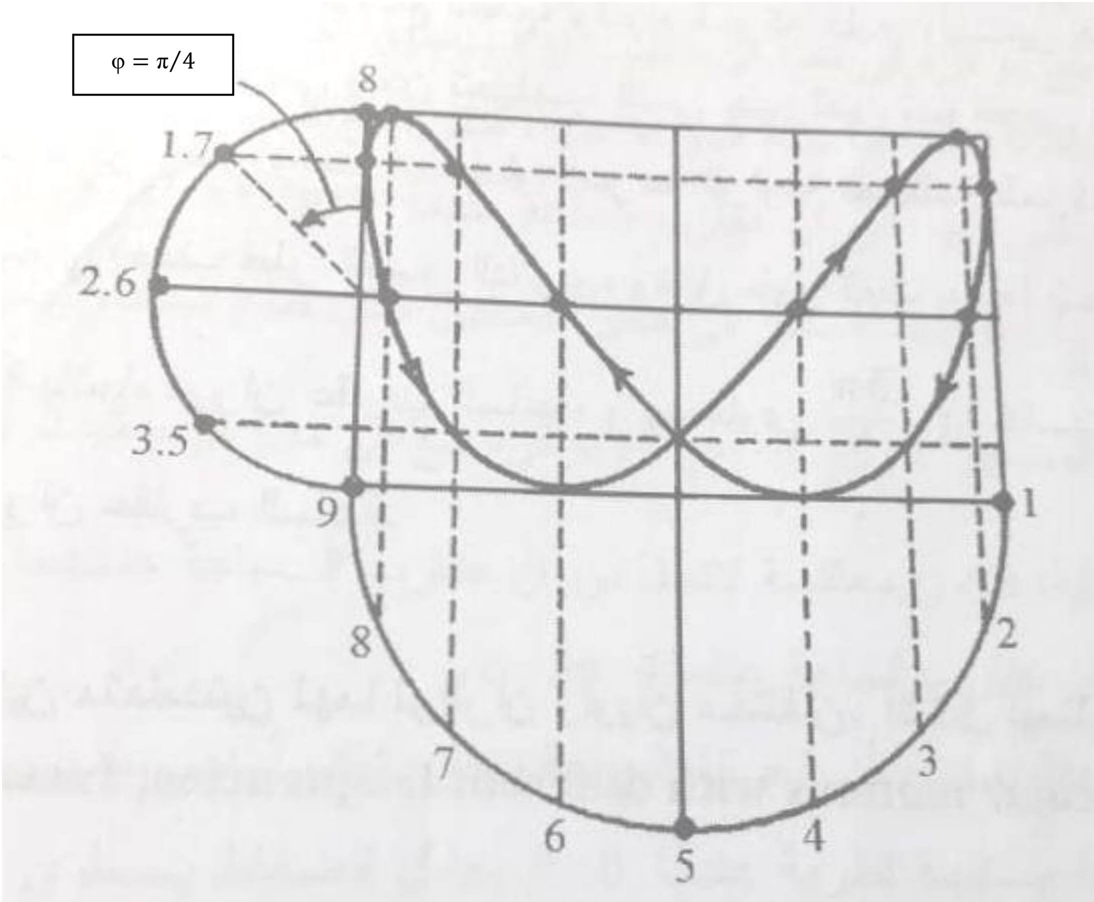
نحصل على معادلة مسار الحركة في المستوي oxy بحذف الوسيط، وهو هنا الزمن t، أمّا شكل المسار فهو عبارة عن منحني مغلق يزداد تعقيداً كلما ابتعدت النسبة التواترية عن كونها نسبة بسيطة. في الحالة العامة، يتعذر إيجاد معادلة هذا المسار بالطرق الرياضية البسيطة ولذا نلجأ إلى استخدام طريقة الإنشاء الهندسي التجريبي، وهي الطريقة المبينة في الشكل التالي (3)، حيث نرسم مستطيلاً ضلعاه على الترتيب $2A_1$ و $2A_2$

ثمّ ننشئ عليهما نصفي دائرتين بحيث يشكل ضلعا المستطيل قطرين لهما على الترتيب، ونعين بعد ذلك باستخدام نصفي الدائرتين عدداً من النقاط الممثلة لوضع الجملة المادية المتحركة في لحظات زمنية متتالية، بحيث تكون المسافة الزمنية بين أية لحظتين متتاليتين مساوياً لكسر صحيح من دور الحركة المركبة $T = n_1T_1 = n_2T_2$ حيث n_2/n_1 النسبة التواترية، وذلك بتعيين إحداثيي الجملة x, y في تلك اللحظات.

فالحركة الممثلة على الشكل التالي (3) يُعبر عنها وسيطياً بالعلاقتين:

$$x(t) = A_1\cos(wt)$$

$$y(t) = A_2\cos\left(2wt + \frac{\pi}{4}\right)$$



الشكل (3): تركيب حركتين توافقيتين بسيطتين متعامدتين لهما تواتران زاويان مختلفان.

أي أنَّ النسبة التواترية في هذه الحالة تساوي $\frac{w_2}{w_1} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{2}{1}$، ومنه يكون دور الحركة المركبة هو $T = T_1 = 2T_2$ أمّا فرق الطور بين الحركتين هو $\frac{\pi}{4}$، لذلك يفضل أن نأخذ الفاصل الزمني بين اللحظات المتتالية، بحيث يوافق ازدياد طور الحركة $y(t)$ ذات التواتر الأكبر مقداره $\frac{\pi}{4}$ أي:

$$2w\Delta t = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{\pi}{8w} = \frac{T}{16}$$

وهكذا نعين على المسار النقاط: $(9\ldots\ldots\ 1,2,3)$ الموافقة لوضع الجملة في المستوي oxy في اللحظات:

$$t = 0\,; \frac{T}{16}; \frac{T}{8}; \ldots\ldots\ldots \frac{T}{2}$$

على الترتيب. أمّا النقاط : $(16\ldots\ldots\ 10,11)$ الموافقة لوضع الجملة في اللحظات:

$$t = \frac{9T}{16}; \frac{10T}{16}; \ldots\ldots\ldots \frac{15T}{16}$$

غير المبينة على الشكل (3) فتكون متناظرة مع النقاط السابقة على الترتيب بالنسبة للمحور oy، ولتوضيح ذلك نعين إحداثيي النقطتين (2) و (10) الموافقتين للحظتين:

$$t = \frac{9T}{16} \quad , \quad t = \frac{T}{16}$$

من المعادلتين الوسيطتين نجد:

$$(x)_2 = A_1 \cos w \frac{T}{16} = A_1 \cos \frac{\pi}{8}$$

$$(x)_{10} = A_1 \cos w \frac{9T}{16} = A_1 \cos\left(\pi + \frac{\pi}{8}\right) = -A_1 \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

أي أنَّ:

$$(x)_2 = -(x)_{10} \qquad (*)$$

وبالنسبة للإحداثي y فنكتب:

$$(y)_2 = A_2 \cos\left(\frac{2wT}{16} + \frac{\pi}{4}\right) = A_2 \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$(y)_{10} = A_2 \cos\left(\frac{2w \times 9T}{16} + \frac{\pi}{4}\right) = A_2 \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

ومنه نجد أنَّ:

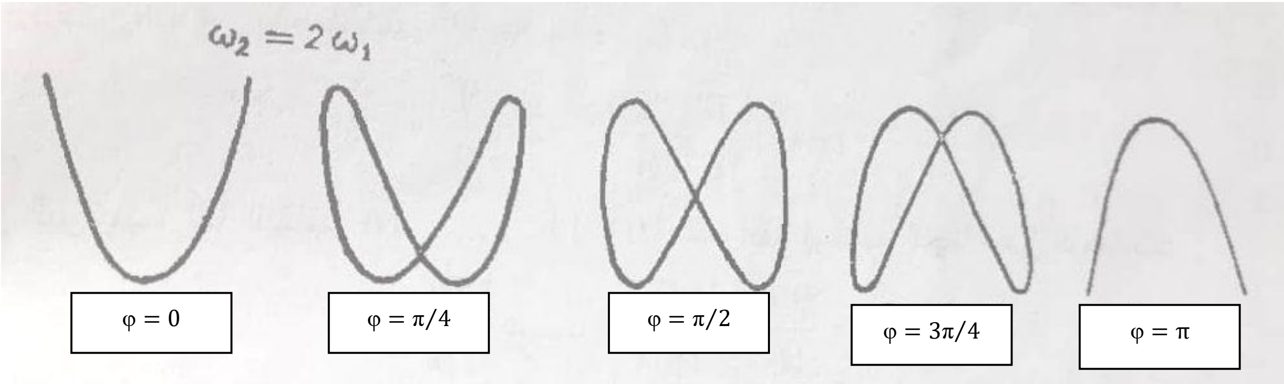
$$(y)_2 = (y)_{10} \qquad (**)$$

بأخذ (*) و (**) بالحسبان، يتضح لنا أنَّ النقطتين (x_2, y_2) و (x_{10}, y_{10}) متناظرتان بالنسبة للمحور oy.

يبين الشكل التالي (4) أشكال المسارات التي تأخذها الحركة المركبة، من أجل قيم مختلفة لفرق الطور φ وهي:

$$\varphi = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\pi$$

تدعى هذه الأشكال بأشكال ليساجو.

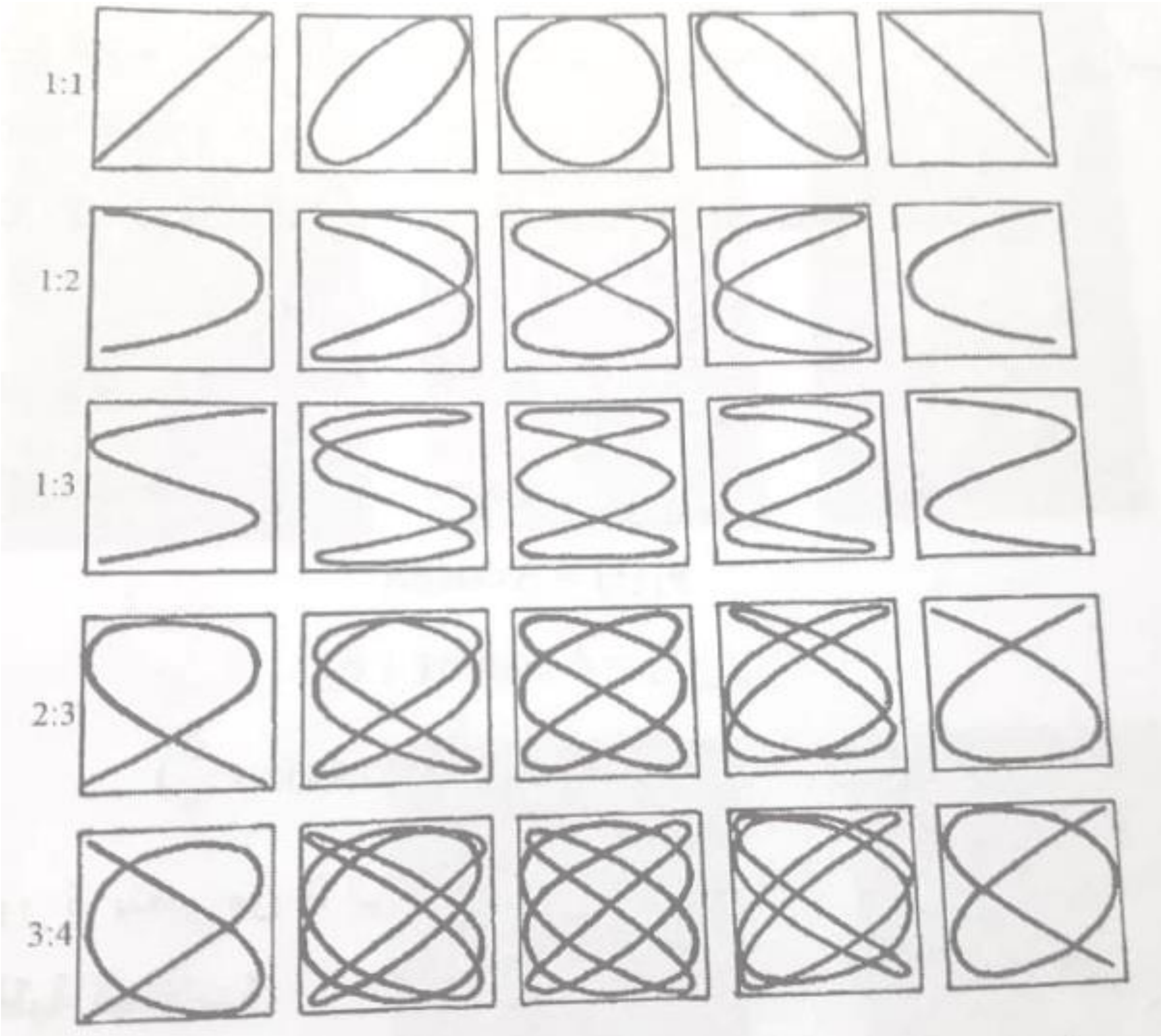


الشكل (4): أشكال ليساجو من أجل $w_2 = 2w_1$ وفرق طور ابتدائي متغير.

يبين الشكل (5) أشكال ليساجو الموافقة لنسب تواترية، وفروق طور مختلفة، وهي عبارة عن صور فوتوغرافية للمسارات المرتسمة على شاشة راسم الاهتزاز المهبطي، عند تطبيق جهد جيبي على كل من مدخلي الراسم (x)و (y) الموصولين بصفائح انحراف الحزمة الالكترونية، وذلك بعد ضبط قيم السعة والتواتر لكل من الجهدين وضبط فروق الطور بينهما.

إنَّ أشكال ليساجو التي لا تمر من نقاط تقاطع أضلاع المستطيل المحدّد للحركة المركبة، تفيدنا في تحديد النسبة التواترية $\frac{f_x}{f_y}$ للحركتين المركبتين اللتين تجريان وفقاً لـ oy, ox وهذه النسبة تساوي $\frac{n_y}{n_x}$.

حيث n_x و n_y تمثلان عدد نقاط تماس المسار مع المحورين oy, ox على الترتيب.



الشكل (5): أشكال ليساجو بنسب تواترية زاوية مختلفة، وفروق طور مختلفة.