كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الاولى**

المادة : هندسة تحليلية

المحاضرة : الرابعة/عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

د. هالة محمد : أ: محسن محمود : أ: ريح الجبلي.

التمرين الأول: أوجد معادلة مستو عمودي من النقطة $M_0(1,2,3)$ ويعامد المستويين:

$$P_1(x,y,z) \equiv 2x - y + 2z - 1 = 0$$

$$P_2(x,y,z) \equiv -x + 2y - 4z + 5 = 0$$

الحل: إن تعامد المستوي المطلوب P مع المستويين P_1 , P_2 يعني أن ناظم كل من المستويين P_1 , P_2 يوازي المستوي المطلوب P أي أن:

$$P \parallel \vec{N_1} \quad , \quad P \parallel \vec{N_2} \quad \Rightarrow \quad \vec{N} = \vec{N_1} \wedge \vec{N_2}$$

من معادلتي P_2 , P_1 نجد أن: $\vec{N_1}(2,-1,1)$, $\vec{N_2}(-1,2,-4)$ وبالتالي:

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 7\vec{j} + 3\vec{k}$$

ومعادلة المستوي المطلوب هي:

$$P(x,y,z) = 2(x-1) + 7(y-2) + 3(z-3) = 0$$

$$P(x,y,z) = 2x + 7y + 3z - 25 = 0$$

التمرين الثاني: برهن أن المستويين

$$\begin{cases} x + 2y + 4z - 9 = 0 \\ 5x + 10y + 20z - 3 = 0 \end{cases}$$

متوازيان ثم احسب البعد بينهما.

الحل: إن أمثال توجيه الناظم المستوي الأول هي $\vec{N_1}(1,2,4)$ ، أمثال توجيه ناظم المستوي الثاني هي $\vec{N_2}(5,10,20)$ ، نلاحظ أن هذه الأمثال متناسبة:

$$\frac{1}{5} = \frac{2}{10} = \frac{4}{20}$$

وبما أن ناظمي المستويين متوازيان فالمستويان متوازيان ، أما البعد بينهما فيتم من إيجاد المعادلتين الناظميتين لكل منهما ، وإيجاد البعد كل منهما عن مبدأ الإحداثيات ، فالمعادلة الناظمية للمستوي الأول:

$$\frac{1}{\sqrt{21}}x + \frac{2}{\sqrt{21}}y + \frac{4}{\sqrt{21}}z - \frac{9}{\sqrt{21}} = 0$$

من هذه المعادلة نلاحظ أن بعد الإحداثيات يبعد عن هذا المستوى بـ:

$$\boxed{d_1 = \frac{9}{\sqrt{21}}}$$

أما المعادلة الناظمية للمستوى الثاني هي:

$$\frac{5}{\sqrt{525}}x + \frac{10}{\sqrt{525}}y + \frac{20}{\sqrt{525}}z - \frac{3}{\sqrt{525}} = 0$$

نلاحظ أن $\boxed{d_2 = \frac{3}{\sqrt{525}}}$

أما البعد بين المستويين هو:

$$d = d_1 - d_2 = \frac{9}{\sqrt{21}} - \frac{3}{\sqrt{525}}$$

التمرين الثالث: أوجد الزاوية بين المستويين:

$$P_1 \equiv x - y + z - 2 = 0$$
$$P_2 \equiv 2x + y + z - 3 = 0$$

الحل: إن شعاع التوجيه الناظم للمستوي الأول هو: $\vec{N_1}(1,-1,1)$

وشعاع توجيه الناظم للمستوي الثاني هو: $\vec{N_2}(2,1,1)$

ومنه:

$$\cos\theta = \frac{|2 - 1 + 1|}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}} = \frac{|2|}{3\sqrt{2}} = \frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

التمرين الرابع: لتكن النقطتان $M_1(1,2,3)$ ، $M_2(0,2,-1)$ ، والمستوي

$$P(x,y,z) = x - y + 3z + 10 = 0$$

حدد موضع النقطة M_1 ، M_2 بالنسبة للمستوي P (هل تقعان في جهة واحدة من المستوي أم في جهتين مختلفتين ؟).

الحل: نوجد القوى المحلية لكل نقطة:

$$P(1,2,3) = 1 - 2 + 9 - 10 = -2$$

$$P(0,2,-1) = 0 - 2 - 3 - 10 = -15$$

النقطتان تقعان في جهة واحدة من المستوي.

التمرين الخامس: أوجد معادلتي المستويين المنصفين الداخلي والخارجي لزاوية بين المستويين:

$$P_1(x,y,z) = 2x + 2y - z + 1 = 0$$

$$P_2(x,y,z) = -x - 2y + 2z + 3 = 0$$

الحل:

$$\frac{2x+2y-z+1}{\sqrt{4+4+1}} = \mp \frac{-x-2y+2z+3}{\sqrt{1+4+4}}$$

$$2x + 2y - z + 1 = \mp(-x - 2y + 2z + 3)$$

نلاحظ أن:

$$\vec{N_1} \cdot \vec{N_2} = 2(-1) + 2(-2) - 1(2)$$

$$= -2 - 4 - 2 = -8 < 0$$ (متفرجة)

(+) توافق المنصف الداخلي

$$2x + 2y - z + 1 = -x - 2y + 2z + 3$$

$$\boxed{3x + 4y - 3z - 2 = 0}$$

(-) تقاطع المنصف الخارجي

$$2x+2y-z+1=-(-x-2y+2z+3)$$

$$\boxed{x+z+4=0}$$

* * * *

ملاحظة إذا كان :

[1] $\vec{N_1}.\vec{N_2}>0$ (حادة) ← + خارجي.
− داخلي.

[2] $\vec{N_1}.\vec{N_2}<0$ (منفرجة) ← + داخلي
− خارجي.

* * * *

أ. ريم الجندي.
أ. حسن محمود

مكتبة A to Z